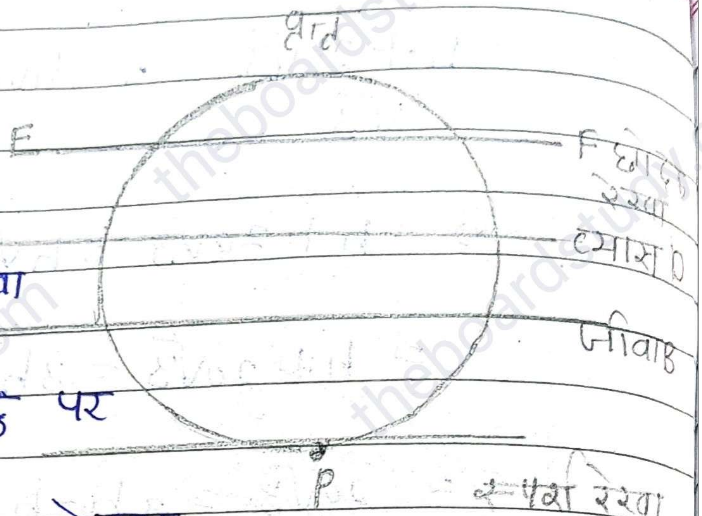
3 Marks

Date:
P. No:

Chapter 10

वृत्त



परिभाषाएँ :-

① **स्पर्श रेखा :-** ऐसी रेखा जो वृत्त को एक और केवल एक बिन्दु पर स्पर्श करती है, या प्रतिच्छेद करती है, वह रेखा स्पर्श रेखा कहलाती है।

(2) **जीवा :-** वृत्त पर स्थित दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा वृत्त की जीवा कहलाती है।

(3) **व्यास :-** वृत्त के केन्द्र से होकर जाने वाली जीवा वृत्त का व्यास कहलाता है।
व्यास वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है, तथा व्यास त्रिज्या का दुगना होता है।

व्यास = 2 × त्रिज्या

(4) **छेदक रेखा :-** वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा वृत्त की छेदक रेखा कहलाती है।

(5) **स्पर्श बिन्दु :-** वृत्त तथा स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को स्पर्श बिन्दु कहते हैं।

theboardstudy.com

Date:
P. No:

प्रश्नावली :- 10.1

Q-1 एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ हो सकती है?

उत्तर एक वृत्त की अनेक स्पर्श रेखाएँ हो सकती है।

Q-2 रिक्त स्थानो की पूर्ति कीजिए :-

(i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे एक बिन्दुओ पर प्रतिच्छेद करती है।

(ii) वृत्त को दो बिन्दुओ पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को छेदक रेखा कहते है।

(iii) एक वृत्त की दो समान्तर स्पर्श रेखाएँ हो सकती है।

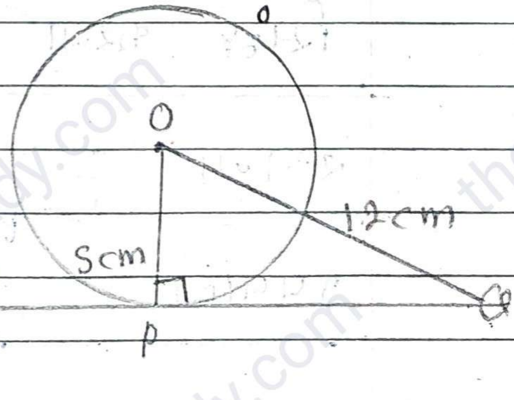
(iv) वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को स्पर्श बिन्दु कहते है।

प्रश्न-3 5 cm त्रिज्या वाले वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि OQ = 12 cm PQ की लम्बाई है :

हल वृत्त की त्रिज्या OP = 5cm

OQ = 12 cm

स्पर्श रेखा की लम्बाई PQ = ?



समकोण $\triangle OPQ$ में पाइथागोरस प्रमेय से-

कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2

$\Rightarrow OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

$\Rightarrow (12)^2 = (5)^2 + PQ^2$

$\Rightarrow 144 = 25 + PQ^2$

$\Rightarrow 144 - 25 = PQ^2$

$\Rightarrow 119 = PQ^2$

$\Rightarrow PQ^2 = 119$

$\Rightarrow \boxed{PQ = \sqrt{119} cm}$

अतः स्पर्श रेखा की लम्बाई $PQ = \sqrt{119} cm$ है।

प्रमेय 10.1

कथन :- वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

दिया है :- वृत्त $C(O, r)$ में XY स्पर्श रेखा व OP त्रिज्या है।

सिद्ध करना है :- $OP \perp XY$

रचना :- स्पर्श रेखा पर 'P' के अतिरिक्त एक बिन्दु Q लिया है।

उपपत्ति

Date:
P. No:

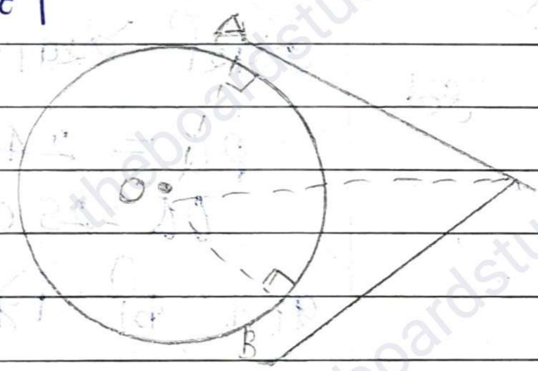
बिन्दु Q वृत्त से बाहर स्थित है, यदि वृत्त के अन्दर स्थित होता तो XY एक छेदक रेखा होती जो संभव नहीं है,
अतः $OQ > OP$

यह स्पर्श रेखा पर (P) के अतिरिक्त सभी बिन्दुओ के लिए सत्य है।
अतः OP सबसे छोटी लम्बाई है, अर्थात

$OP \perp XY$

प्रमेय 10.2 (Imp) कथन :- सिद्ध करो कि बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओ की लम्बाई बराबर होती है।

दिया है :- वृत्त C(O, r) में दो स्पर्श रेखाएं PA व PB हैं, तथा (P) बाह्य बिन्दु है।



सिद्ध करना है :- $PA = PB$

रचना :- OA, OB व OP को मिलाया तथा $OA \perp PA$
$OB \perp PB$

उपपत्ति :- ΔOAP एवं ΔOBP में

$OA = OB = r$ (वृत्त की त्रिज्या)
$\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ (रचना से)

$OP = PO$ (उभयनिष्ठ भुजा)

RHS प्रमेय से -

$\Delta OAP \cong \Delta OBP$

संगत भुजाऐं बराबर होगी

$PA = PB$

प्रश्नावली :- 10.2

प्रश्न 1 एक बिन्दु Q से एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 24 cm तथा Q की केन्द्र से दूरी 25 cm है। वृत्त की त्रिज्या है :-

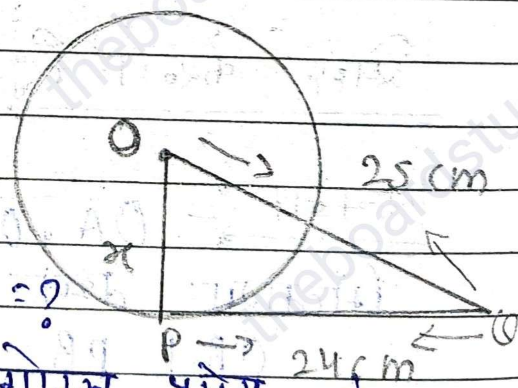
(a) 7 cm ✓ (b) 12 cm (c) 15 cm (d) 24.5 cm

हल स्पर्श रेखा की लम्बाई

$PQ = 24$ cm

$OQ = 25$ cm

वृत्त की त्रिज्या $OP = x$ cm = ?



समकोण ΔOPQ में पाइथागोरस प्रमेय से -

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$\Rightarrow (25)^2 = (x)^2 + (24)^2$$

$\Rightarrow 625 = r^2 + 576$

$\Rightarrow 625 - 576 = r^2$

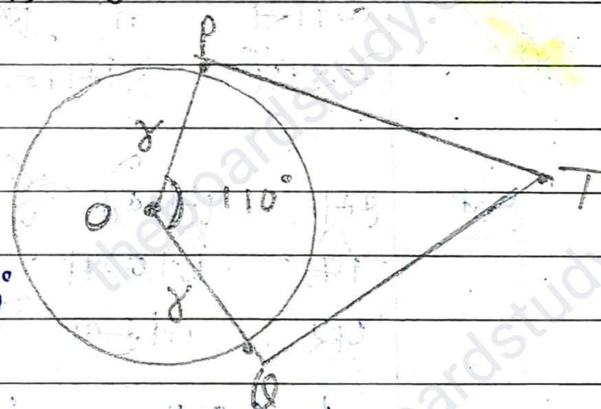
$\Rightarrow 49 = r^2$

$\Rightarrow (7)^2 = r^2$

$\Rightarrow$ $\boxed{r = 7 \text{ cm}}$

प्रश्न 2 आकृति 10.11 में यदि O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर TP, TQ दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं, कि $\angle POQ = 110°$ तो $\angle PTQ$ बराबर है:

(a) 60° (b) 70° ✓ (c) 80° (d) 90°



हल हम जानते हैं, की □ OPTQ के चारो कोणो का योग 360° होता है।

अतः –

$\Rightarrow \angle OPT + \angle PTQ + \angle TQO \angle POQ = 360°$

$\Rightarrow 90° + \angle PTQ + 90° + 110° = 360°$

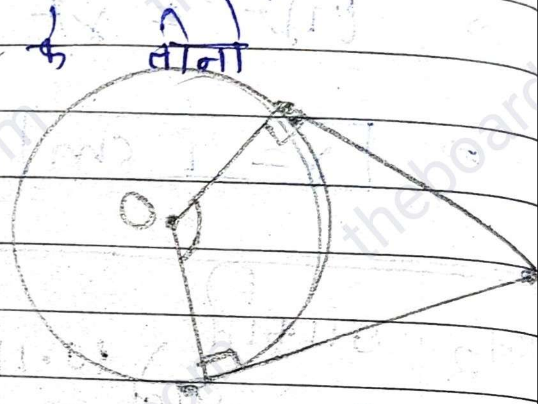
$\Rightarrow 290° + \angle PTQ = 360°$

$\angle PTQ = 360° - 290°$

$\boxed{\angle PTQ = 70°}$ Ans

प्रश्न 3 यदि एक बिन्दु P से केन्द्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 80° के कोण पर झुकी हो तो ∠POA बराबर है :

(a) 50° (b) 60° (c) 70° (d) 80°



हल हम जानते है, कि त्रिभुज के तीनो कोणो का योग 180° होता है।

$\Rightarrow \angle OAP + \angle APO + \angle POA = 180°$

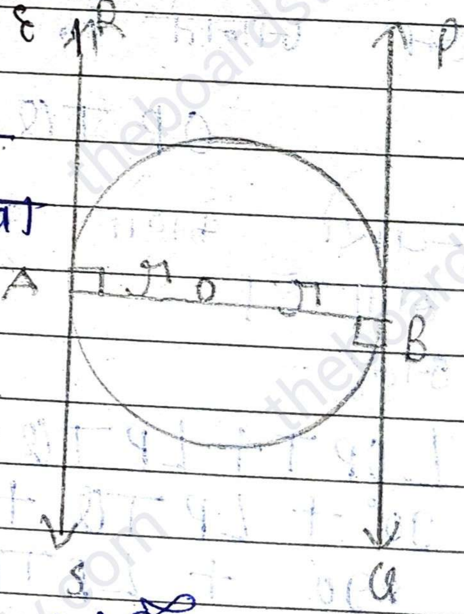
$\Rightarrow 90° + 40° + \angle POA = 180°$

$\Rightarrow 130° + \angle POA = 180°$

$\angle POA = 180° - 130$

$\boxed{\angle POA = 50°}$ Ans.

प्रश्न 4 सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरो पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समान्तर होती है।



हल हम जानते है, की वृत्त कि त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।

$\angle OAR = 90°$ —— (i)

$\angle OBQ = 90°$ —— (ii)

समी (i) व (ii) से

$\angle OAR = \angle OBQ = 90°$ है।

एकान्तर कोणो का युग्म बराबर है

अतः $\boxed{PQ \parallel RS}$ हल

theboardstudy.com

Date:
P. No:

प्रश्न 5 एक बिन्दु A से, जो एक वृत्त के केन्द्र से 5 cm दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 4 cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल स्पर्श रेखा की लम्बाई $PA = 4cm$

वृत्त की त्रिज्या $OA = 5cm$
$OP = r\,cm = ?$

समकोण $\triangle OPA$ में पाइथागोरस प्रमेय से -

$कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2$

$(5)^2 = r^2 + (4)^2$

$25 = r^2 + 16$

$25 - 16 = r^2$

$9 = r^2$

$(3)^2 = r^2$

$\boxed{r = 3cm}$ अतः वृत्त की त्रिज्या 3cm है।

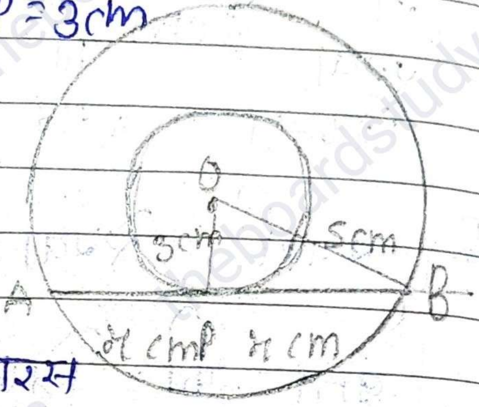
प्रश्न 6 दो संकेंद्रीय वृत्तों की त्रिज्या 5 cm तथा 3 cm है। बड़े वृत्त की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करता है।

Date:
P. No: ✓

हल बड़े वृत्त कि त्रिज्या $OB = 5cm$
छोटे वृत्त कि त्रिज्या $OP = 3cm$

$OP = 3cm$

$PB = x\,cm$



जीवा AB की लम्बाई = ?

समकोण $\triangle OPB$ में पाइथागोरस प्रमेय से -

$कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2$

$(5)^2 = (3)^2 + x^2$

$25 = 9 + x^2$

$25 - 9 = x^2$

$16 = x^2$

$(4)^2 = x^2$

$x = 4cm$

जीवा AB की लम्बाई $= x + x$

$AB = 4 + 4$

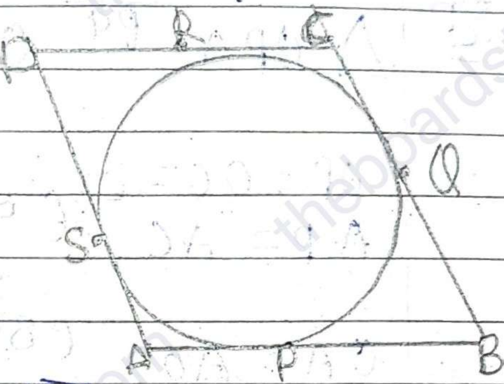
$AB = 8cm$

अतः जीवा AB की लम्बाई 8 cm है।

प्रश्न 7 - एक वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज ABCD खींचा गया है, सिद्ध कीजिए $AB + CD = AD + BC$

Date:
P. No:

हल हम जानते हैं, बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर होती है। अतः



$\Rightarrow$ $AP = AS$ —— (1)

$\Rightarrow$ $BP = BQ$ —— (2)

$\Rightarrow$ $CR = CQ$ —— (3)

$\Rightarrow$ $DR = DS$ —— (4)

$\Rightarrow$ समी० (i) व (ii) को जोड़ने पर

$\Rightarrow$ $AP + BP = AS + BQ$

$\Rightarrow$ $AB = AS + BQ$ —— (5)

समी० (3) व (4) को जोड़ने पर –

$\Rightarrow$ $CR + DR = CQ + DS$

$\Rightarrow$ $CD = CQ + DS$ —— (6)

समी० (3) व (6) को जोड़ने पर –

$\Rightarrow$ $AB + CD = AS + BQ + CQ + DS$

$\Rightarrow$ $AB + CD = (AS + DS) + (BQ + CQ)$

$$\boxed{AB + CD = AD + BC}$$

प्रश्न-8 आकृति 10.13 में XY तथा X'Y' O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर दो समान्तर स्पर्श रेखाएँ हैं, और स्पर्श बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा X'Y' को B पर प्रतिच्छेद करती है।

theboardstudy.com

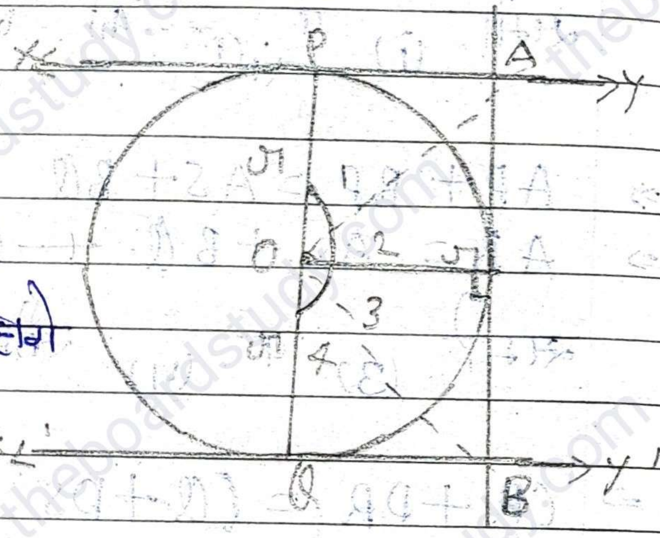
सिद्ध कीजिए की $\angle AOB = 90^\circ$ है।

हल $\triangle OPA$ एवं OCA में

⇒ $OP = OC = r$ (वृत्त की त्रिज्या)

$AP = AC$ (बाह्य बिन्दु से खींची गई रेखा स्पर्श रेखा बराबर होती है।)

⇒ $OA = AO$ (उभय निष्ठ भुजा)



SSS प्रमेय से

⇒ $\triangle OPA \cong \triangle OCA$

संगत कोण बराबर होगे

$\angle 1 = \angle 2$ —— (1)

इसी प्रकार –

$\triangle OQB \cong \triangle OCB$

संगत कोण बराबर होगे –

$\angle 4 = \angle 3$ —— (2)

हम जानते है, की

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$

समी (i) व (ii) से –

$= \angle 2 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 3 = 180^\circ$

⇒ $2\angle 2 + 2\angle 3 = 180^\circ$

⇒ $2(\angle 2 + \angle 3) = 180^\circ$

⇒ $AOB = \frac{180^\circ}{2}$ $\boxed{AOB = 90^\circ}$ Ans