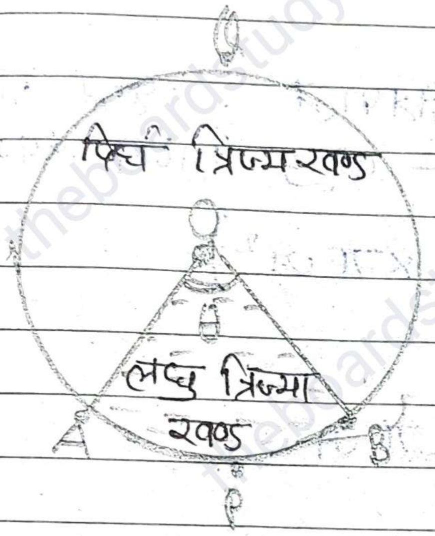
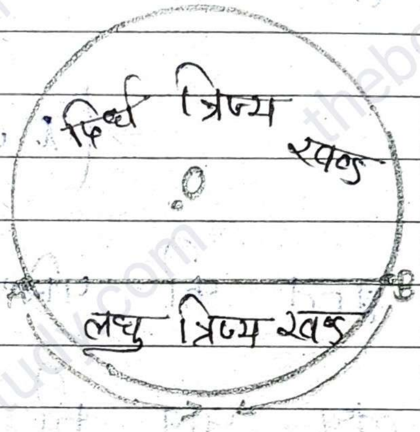
Date:
P. No:

Chapter - 11

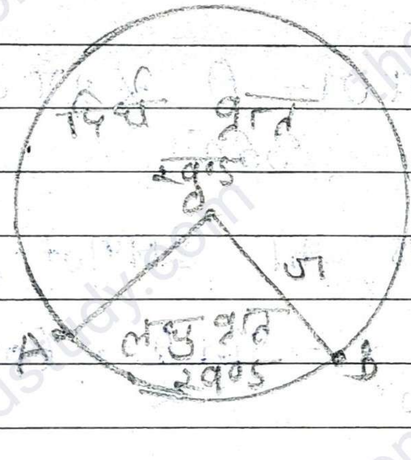
वृत्त से संबंधित क्षेत्रफल





लघु त्रिज्य खण्ड AOBP का क्षेत्रफल
दिर्घ त्रिज्य खण्ड AOBQ का क्षेत्रफल

AB लघु चाप की लम्बाई
BA = दीर्घ चाप की लम्बाई



सूत्र :-

(1) वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

(2) अर्द्ध वृत्त का क्षेत्रफल $\Rightarrow \frac{1}{2} \pi r^2$

(3) वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4} \pi r^2$

theboardstudy.com

Date:
P. No:

(4) लघु त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

(5) दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल − लघु त्रिज्य खण्ड का क्षे.

$$\Rightarrow \left(\pi r^2 - \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2\right)$$

(6) वृत्त की परिधी $\Rightarrow 2\pi r$

(7) लघु चाप की लम्बाई $= \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$

(8) दीर्घ चाप की लम्बाई = वृत्त की परिधी − लघु चाप की लम्बाई

$$\left(2\pi r - \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r\right)$$

(9) लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल =

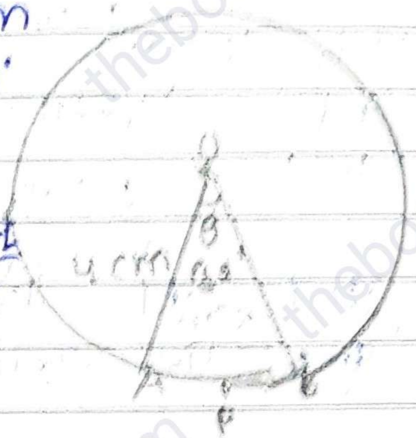
$$\left[\frac{\theta}{360^\circ} \times - \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right]$$

उदा 01 त्रिज्या 4 cm वाले एक वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका कोण 30° है। साथ ही संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$)

हल वृत्त की त्रिज्या $r = 4\ cm$

केन्द्र पर बना कोण $\theta = 30°$

$\pi = 3.14$



लघु त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल

$\frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

$\Rightarrow \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4$

$\Rightarrow \frac{3.14 \times 4}{3}$

$\Rightarrow \frac{12.56}{3}$

$\Rightarrow 4.186$

$\Rightarrow \boxed{4.19\ cm^2}$

दीर्घ त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षे. - लघु त्रिज्य खण्ड का क्षे.

$= \pi r^2 - 4.19$

$\Rightarrow 3.14 \times 4 \times 4 - 4.19$

$\Rightarrow 3.14 \times 16 - 4.19$

$\Rightarrow 50.24 - 4.19$

$\boxed{46.05\ cm^2}$ Ans.

Date:
P. No:

उदा 02 आकृति 11.6 में दर्शाए गए वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि वृत्त की त्रिज्या 21 cm है।
और $\angle AOB = 120°$ है $\pi = \frac{22}{7}$ ।

हल वृत्त की त्रिज्या $r = 21$ cm
केन्द्र पर बना कोण $\theta = 120°$

वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल –

$$r^2\left[\frac{\theta}{360°}\times\pi - \sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 21\times21\left[\frac{120}{360}\times\frac{22}{7} - \sin\frac{120}{2}\cdot\cos\frac{120}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 441\left[\frac{22}{21} - \sin 60°\cdot\cos 60°\right]$$

$$\Rightarrow 441\left[\frac{22}{21} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 441\left[\frac{22}{21} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{441\times22}{21} - \frac{441\times\sqrt{3}}{4}$$

$$= 21\times22 - \frac{441\times\sqrt{3}}{4}$$

$$\left(462 - \frac{441\times\sqrt{3}}{4}\right)\ cm^2 \text{ Ans.}$$

Date:
P. No:

प्रश्नावली : 11.1

प्रश्न 1 (Imp) 6 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है। $\pi = \frac{22}{7}$

हल वृत्त की त्रिज्या $r = 6$ cm
केन्द्र पर बना कोण $\theta = 60°$
लघु एक त्रिज्य खण्ड का क्षे. $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$\Rightarrow \frac{60°}{360} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6$

$\Rightarrow \frac{22 \times 6}{7}$

$= \frac{132}{7}$ cm²

प्रश्न 2 (Imp) एक वृत्त के चतुर्थांश (Quadrant) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22 cm है। $\pi = \frac{22}{7}$

हल वृत्त की परिधि $= 22$ cm
वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

$\Rightarrow 2 \times \frac{22}{7} \times r = 22$

$\Rightarrow 2 \times 22 \times r = 22 \times 7$

$\Rightarrow r = \frac{22 \times 7}{2 \times 22}$

$\Rightarrow$ $r = \frac{7}{2}$ cm² Ans.

Date:
P. No:

वृत्त का चतुर्थांश का क्षेत्रफल -

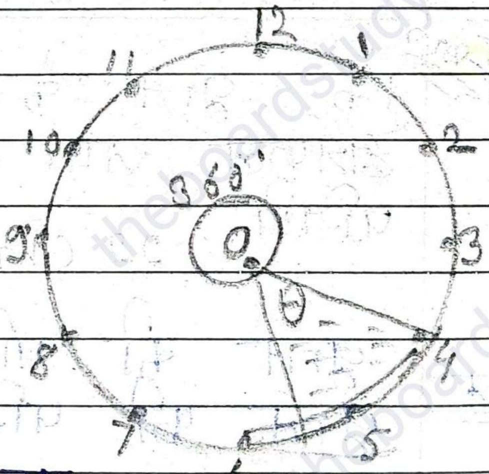
$\frac{1}{4} \cdot \pi r^2$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \frac{11 \times 7}{2 \times 4}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{77}{8} \ cm^2}$ Ans.

प्रश्न 3 एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी 14 cm है। इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल वृत्त की त्रिज्या = कांटे की लम्बाई

$r = 14$ cm

60 मिनट में केन्द्र पर बना कोण 360°

1 मिनट में केन्द्र पर बना कोण

$\frac{360°}{60} = 6$

$\Rightarrow$ 5 मिनट में केन्द्र पर बना कोण

$\theta = 6 \times 5 = 30°$

Date:
P. No:

लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

$\Rightarrow \frac{30°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$\frac{22 \times 7}{3}$

$\Rightarrow \left(\frac{154}{3}\right) cm^2$ Ans.

प्रश्न 4 10 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर एक समकोण अंतरित करती है, निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :-

(i) संगत लघु वृत्तखण्ड (ii) संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड ($\pi = 3.14$)

हल वृत्त की त्रिज्या $r = 10$ cm
केन्द्र पर बना कोण $\theta = 90°$

(i) लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल -

$$r^2 \left[\frac{\theta}{360°} \times \pi - \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 10 \times 10 \left[\frac{90°}{360°} \times 3.14 - \sin\frac{90°}{2} \cdot \cos\frac{90°}{2}\right]$$

Date:
P. No:

$$\Rightarrow 100\left[\frac{3.14}{4} - \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ\right]$$

$$100\left[\frac{3.14}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$100\left[\frac{314}{400} - \frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 100 \times \frac{314}{400} - 100 \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{314}{4} - \frac{100}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{314 - 200}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{114}{4}$$

$28.5\ cm^2$

(ii) वृत्त की त्रिज्या $r = 10\ cm$
केन्द्र पर बना कोण $\theta = 90^\circ$

दीर्घ त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल
वृत्त का क्षेत्रफल − लघु त्रिज्य खण्ड का क्षे.

$\Rightarrow \pi r^2 - \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$\Rightarrow 3.14 \times 10 \times 10 - \frac{90}{360} \times 3.14 \times 10 \times 10$

$\Rightarrow 3.14 \times 100 - 3.14 \times 5 \times 5$

$\Rightarrow 314.00 - 3.14 \times 25$

$\Rightarrow 314.00 - 78.50$

$\Rightarrow \boxed{235.50\ cm^2}$ Ans.

प्रश्न 5 21 cm त्रिज्या वाले वृत्त का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए:

(i) चाप की लम्बाई
(ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल
(iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

हल वृत्त की त्रिज्या $r = 21$ cm
केन्द्र पर बना कोण $\theta = 60°$

(i) चाप की लम्बाई $= \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

$\Rightarrow \frac{60}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$

$\boxed{22\ cm}$

theboardstudy.com

(ii) लघु त्रिज्यखण्ड का क्षे. $= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

$\Rightarrow \frac{60°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

$\Rightarrow 11 \times 21$

$\Rightarrow \boxed{231 \text{ cm}^2}$

(iii) वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल –

$r^2 \left[\frac{\theta}{360°} \times \pi - \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right]$

$\Rightarrow 21 \times 21 \left[\frac{60}{360} \times \frac{22}{7} - \sin\frac{60}{2} \cdot \cos\frac{60}{2}\right]$

$\Rightarrow 441 \left[\frac{11}{21} - \sin 30° \cdot \cos 30°\right]$

$\Rightarrow 441 \left[\frac{11}{21} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$\Rightarrow 441 \left[\frac{11}{21} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

$\Rightarrow \frac{441 \times 11}{21} - \frac{441 \times \sqrt{3}}{4}$

$21 \times 11 - 441\sqrt{3}$

$\left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right) \text{ cm}^2$

Date:
P. No:

प्रश्न - 6 15 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर 60° का कोण अंतरित करती है। संगत लघु और दीर्घ वृत्तखण्डो के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$) और ($\sqrt{3} = 1.73$)

हल वृत्त की त्रिज्या $r = 15$ cm
केन्द्र पर बना कोण $\theta = 60°$

⇒ लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

$$r^2 \left[\frac{\theta}{360°} \times \pi - \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 15 \times 15 \left[\frac{60}{360} \times 3.14 - \sin\frac{60}{2} \cdot \cos\frac{60}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 225 \left[\frac{3.14}{6} - \sin 30° \cdot \cos 30°\right]$$

$$\Rightarrow 225 \left[\frac{3.14}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 225 \left[\frac{3.14}{6} - \frac{1.73}{4}\right]$$

$$225 \left[\frac{3.14 \times 2 - 1.73 \times 3}{12}\right]$$

Date:
P. No:

$$\Rightarrow 225\left[\frac{6.28-5.19}{12}\right]$$

$$\Rightarrow 225 \times \frac{1.09}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{245.25}{12}$$

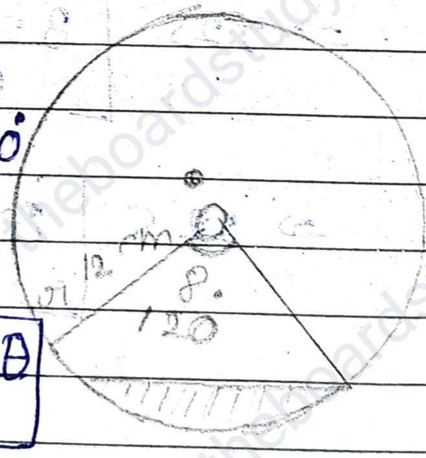
$$\boxed{20.44\ cm^2}$$ Ans.

Q-7 त्रिज्या 12 cm वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर 120° का कोण अंतरित करती है। संगत वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

हल वृत्त की त्रिज्या $r = 12$ cm

केन्द्र पर बना कोण $\theta = 120°$

वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $\Rightarrow$



$$r^2\left[\frac{\theta}{360°} \times \pi - \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 12 \times 12\left[\frac{120}{360} \times 3.14 - \sin\frac{120°}{2} \cdot \cos\frac{120°}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 144\left[\frac{3.14}{3} - \sin 60° \cos 60°\right]$$

$$\Rightarrow 144\left[\frac{3.14}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 144\left[\frac{3.14}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$$

$$\Rightarrow 144\left[\frac{3.14}{3} - \frac{1.73}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{48}{\cancel{144}} \times 3.14}{3} - \frac{\overset{36}{\cancel{144}} \times 1.73}{4}$$

$$\Rightarrow 48 \times 3.14 - 36 \times 1.73$$

$$\Rightarrow 150.72 - 62.28$$

$$= \boxed{88.44\ cm^2}$$

Q. No 8 15 m भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूँटे से एक घोड़े को 5 m लंबी रस्सी से बाँध दिया गया है। [देखिए आकृति 11.8] ज्ञात कीजिए

(i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोड़ा घास चर सकता है।

(ii) चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि, यदि घोड़े को 5 m लंबी रस्सी के स्थान पर 10 m लम्बी रस्सी से बाँध दिया जाए।

($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)

theboardstudy.com

(i) त्रिज्या (r) = घोड़े की रस्सी की लम्बाई

$r = 5m$

वर्ग का कोना $\theta = 90°$

घोड़े द्वारा चरा गया क्षे॰ = त्रिज्या खण्ड का क्षेत्रफल

$\Rightarrow \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

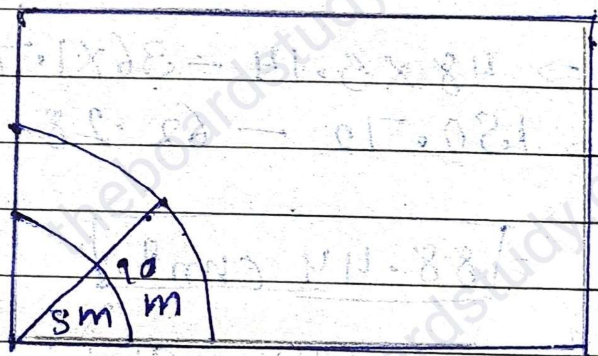
$\frac{90°}{360°} \times 3.14 \times 5 \times 5$

$\frac{3.14}{4} \times 25$

$\Rightarrow \frac{1.57 \times 25}{2}$

1.57×12.5

19.625 m^2



(ii) त्रिज्या (r) = घोड़े की रस्सी की लम्बाई

$r = 10\ m$

क्षेत्रफल में वृद्धि = बड़े त्रिज्या खण्ड का क्षे॰ – छोटे त्रिज्या खण्ड का क्षे॰

Date:
P. No:

$$\Rightarrow \frac{\theta}{360} \times \pi \times (10)^2 - \frac{\theta}{360} \times \pi \times (5)^2$$

$$\frac{\theta}{360} \times \pi \left[(10)^2 - (5)^2\right]$$

$$\frac{90}{360} \times 3.14 \left[100 - 25\right]$$

$$\Rightarrow \frac{3.14}{4} \times 75$$

$$1.57 \times 37.5$$

$$\boxed{58.875\ m^2}$$ Ans.

Q.9 एक वृत्ताकार ब्रूच को चाँदी के तार से बनाया जाना है, जिसका व्यास 35 mm है। तार को वृत्त के व्यासों को बनाने में प्रयुक्त किया गया है, जो उसे 10 बराबर त्रिज्यखण्डों में विभाजित करता है। जैसा कि आकृति 11.9 में दर्शाया गया है तो ज्ञात कीजिए।

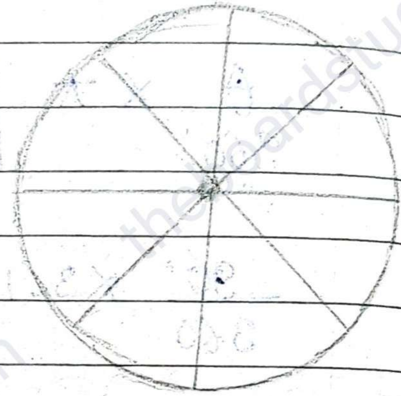
(i) कुल वांछित चाँदी के तार की लम्बाई।
(ii) ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल।

हल वृत्ताकार ब्रूच का व्यास = 35 mm

वृत्ताकार ब्रूच की त्रिज्या $r = \frac{35}{2}$ mm

Date:
P. No:

(i) चाँदी के तार की लम्बाई = वृत्त की परिधि + 5 × एक व्यास की लम्बाई



$\Rightarrow 2\pi r + 5 \times 35$

$2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} + 175$

$22 \times 5 + 175$

$110 + 175$

285 mm

(ii) वृत्ताकार ब्रूच की त्रिज्या $(r) = \frac{35}{2}$ mm

$\Rightarrow \theta = \frac{360°}{10}$

$\boxed{\theta = 36°}$

ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल :-

$\frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

$\frac{36°}{360°} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{35}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{11 \times 35}{2 \times 2}$

$\frac{11}{35} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2}$

$\boxed{\frac{385}{4} \text{ mm}^2}$

theboardstudy.com

Date:
P. No:

Q-10 एक छतरी में आठ ताने जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं। (देखिए आकृति 11.10) छतरी को 45 cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल त्रिज्या $(r) = 45$ m

दो क्रमागत तानों के बीच का कोण $\theta = \frac{360}{8}$

$\boxed{\theta = 45}$

दो क्रमागत तानों के बीच का क्षे. = त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल

$\Rightarrow \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$\frac{45}{360} \times \frac{22}{7} \times (45)^2$

$\frac{11 \times 45 \times 45}{4 \times 7}$

$\boxed{\frac{22275}{28} \text{ cm}^2}$

theboardstudy.com

Q-11 किसी कार के दो वाइपर हैं, परस्पर कभी आच्छादित नहीं होता है। प्रत्येक वाइपर की पत्ती की लम्बाई 25 cm है, और 115 के कोण तक घूम कर सफाई कर सकता है। पत्तियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ हो जाता है वह ज्ञात कीजिए?

हल वाइपर की पत्ति की लम्बाई (r) = 25 cm

दोनो वाइपर द्वारा साफ होने वाला क्षे. = 2 × त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$\Rightarrow \frac{2 \times \theta}{360°} \times \pi r^2$

$\Rightarrow \frac{2 \times 115}{360} \times \frac{22}{7} \times 25 \times 25$

$\Rightarrow \frac{23 \times 11 \times 625}{18 \times 7}$

$\Rightarrow \frac{253 \times 625}{18 \times 7}$

$\frac{158125}{126}$

$\boxed{\frac{158125}{126} \text{ cm}^2}$