Date 26/09/2024

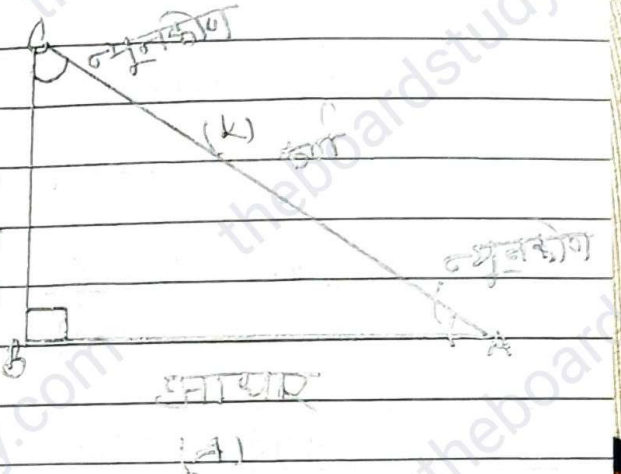
Rajshree
DATE: _____ PAGE NO: _____

—: Chapter :— 8
त्रिकोण मिति

पाइथागोरस प्रमेय :—

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$K^2 = L^2 + A^2$$



6 त्रिकोण मितीय अनुपात

① $\text{Sin}\,A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{L}{K}$

(2) $\text{Cos}\,A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{A}{K}$

(3) $\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{L}{A}$

(4)

(4) $\text{Cosec}\,A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{K}{L}$

(5) $\text{Sec}\,A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{K}{A}$

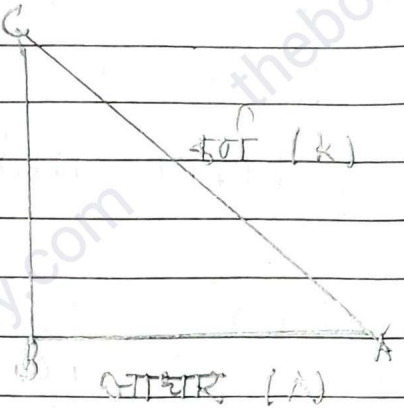
$\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{A}{L}$

Trick

L A L		K K A
K K A		L A L
Sin Cos Tan		Cosec Sec A Cot A

Rajshree
DATE: PAGE NO.:

प्रश्न :-1 यदि $\tan A = \frac{4}{3}$, तो कोण A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए?



$\tan A = \frac{4}{3} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

लम्ब = 4
आधार = 3
कर्ण = ?

समकोण $\triangle ABC$ में पाइथगोरस प्रमेय :-

$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$

$\text{कर्ण} = (4)^2 + (3)^2$

$\text{कर्ण}^2 = 16 + 3$

$\text{कर्ण}^2 = 25 = (5)^2$

$\text{कर्ण} = 5$

$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{4}{k} = \frac{4}{5}$

$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{3}{k} = \frac{3}{5}$

$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{k}{4} = \frac{5}{4}$

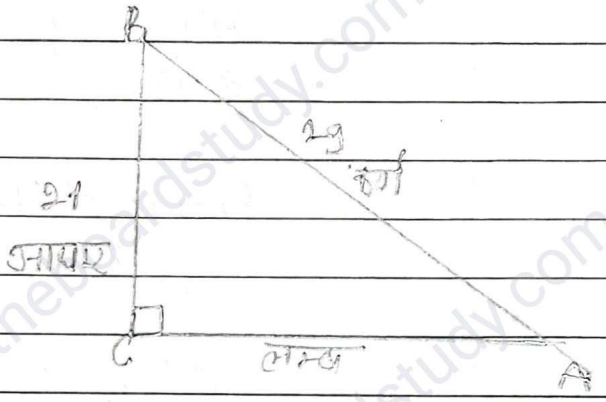
$$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{K}{A} = \frac{5}{3}$$

$$\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{A}{L} = \frac{3}{4}$$

उदा॰-3 ΔACB लीजिए जिसका कोण C समकोण है, जिसमे $AB = 29$ इकाई $BC = 21$ इकाई और $\angle ABC = \theta$ [देखिए आकृति 8.10] है, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$



समकोण ΔABC में

पाइथगोरस प्रमेय से

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$(29)^2 = \text{लम्ब}^2 + (21)^2$$

$$841 = \text{लम्ब}^2 + 441$$

$$841 = \text{लम्ब}^2 + 441$$

$$841 - 441 = \text{लम्ब}$$

$$400 = \text{लम्ब}^2$$

$$(20)^2 = \text{लम्ब}^2$$

Rajshree

DATE _____ PAGE NO: _____

लम्ब = 20

$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{20}{29}$

$\cos = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{21}{29}$

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \left(\frac{20}{29}\right)^2$

$= \frac{441}{841} + \frac{400}{841}$

$\frac{441 + 400}{841}$

$\frac{841}{841} = 1$

$\boxed{\cos\theta + \sin^2\theta = 1}$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 \left(\frac{20}{29}\right)^2$

$\frac{441}{841} - \frac{400}{841}$

$= \frac{441 - 400}{841}$

$\boxed{\cos - \sin^2\theta = \frac{41}{841}}$

Rajshree
DATE _____ PAGE NO. _____

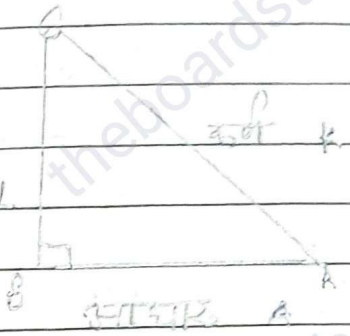
Date 12/09/2024

उदा:-1 एक समकोण त्रिभुज ABC में जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = 1$ तो सत्यापित कीजिए कि

$$2 \sin A \cos A = 1$$

हल

$$\tan A = \frac{1}{1} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$



लम्ब = 1
आधार = 1
कर्ण = ?

समकोण $\triangle ABC$ में पाइथगोरस प्रमेय से

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$\text{कर्ण}^2 = (1)^2 + (1)^2$$

$$\text{कर्ण}^2 = 1 + 1$$

$$\text{कर्ण} = 2$$

$$\boxed{\text{कर्ण} = \sqrt{2}}$$

$$2 \sin A \cos A = 1$$

L.H.S $2 \cdot \sin A \cos A$

$$= 2 \times \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \times \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}$$

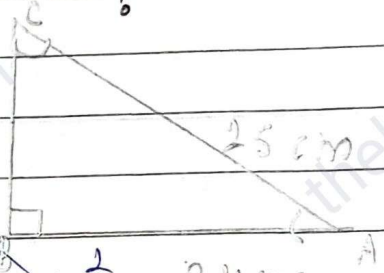
$$= 1$$

$$= \text{R.H.S}$$

Rajshree
DATE PAGE NO.

प्रश्नावली 8.1

प्रश्न 1 ΔABC में, जिसका कोण B समकोण है, और $AB = 24$ cm और $BC = 7$ cm है निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए ?



हल $AB = 24$ cm, $BC = 7$ cm

कर्ण $AC = ?$

समकोण $\triangle ABC$ में पाइथगोरस प्रमेय से

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$\text{कर्ण}^2 = (7)^2 + (24)^2$$

$$\text{कर्ण}^2 = 49 + 576$$

$$\text{कर्ण}^2 = 625$$

$$\text{कर्ण} = (25)^2$$

$$\boxed{\text{कर्ण} = 25 \text{ cm}}$$

(i) $\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{7}{25}$

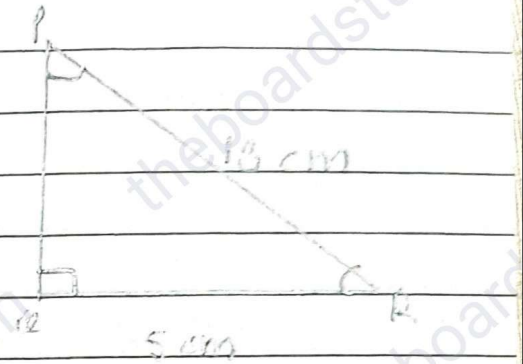
$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{24}{25}$

(ii) $\tan C = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{24}{25}$

$\cot C = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{7}{25}$

Rajshree
DATE: PAGE NO:

प्रश्न 2 आकृति 8.13 में $\tan P - \cot R$ का मान ज्ञात कीजिए.



हल $\tan P - \cot R = ?$

समकोण $\triangle PQR$ में पाइथगोरस प्रमेय से

कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2

$(13)^2 = (12)^2 +$ आधार^2

$= 169 = 144 +$ आधार^2

$= 169 - 144 =$ आधार^2

$25 =$ आधार^2

$(5)^2 =$ आधार^2

आधार $= 5$

$\therefore \tan P - \cot R$

$= \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} - \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

$= \frac{5}{12} - \frac{5}{12}$

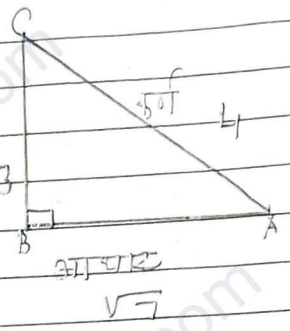
$= 0$

प्रश्न 3 यदि $15 \cot A = 8$ हो तो $\sin A$ और $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए ?

Rajshree
DATE: PAGE NO.:

हल $\sin = \frac{3}{4} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

$\cos A = ?$ $\tan A = ?$



लम्ब $= 3$
कर्ण $= 4$
आधार $= ?$

समकोण $\triangle$ ABC में पाइथगोरस प्रमेय से

$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$

$(4)^2 = (3)^2 + \text{आधार}^2$

$16 = 9 + \text{आधार}^2$

$16 - 9 = \text{आधार}^2$

$7 = \text{आधार}^2$

$(\sqrt{7})^2 = \text{आधार}^2$

$\text{आधार} = \sqrt{7}$

$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ पाइथगोरस प्रमेय

$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

प्रश्न 4 यदि 15 मान

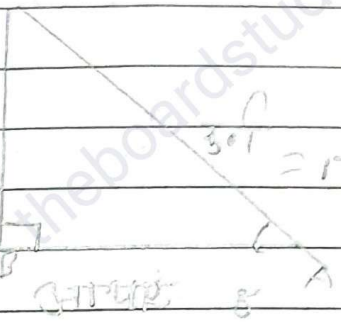
हल $15 \cdot \text{Cot}$
$\text{Cot} A$

$\sin A$
$\text{Sec} A$

आधार
लम्ब
कर्ण
समकोण

$\sin$

प्रश्न 4 यदि 15 cot A = 8 होतो sin A और sec A का मान ज्ञात कीजिए?



हल 15 · cot A = 8

$\cot a = \frac{8}{15} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

sin A = ?

sec A = ?

आधार = 8

लम्ब = 15

कर्ण = ?

समकोण △ ABC में पाइथागोरस प्रमेय से

$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$

$\text{कर्ण}^2 = (15)^2 + (8)^2$

$\text{कर्ण}^2 = 225 + 64$

$\text{कर्ण} = 289$

$\text{कर्ण}^2 = (17)^2$

$\text{कर्ण} = 17$

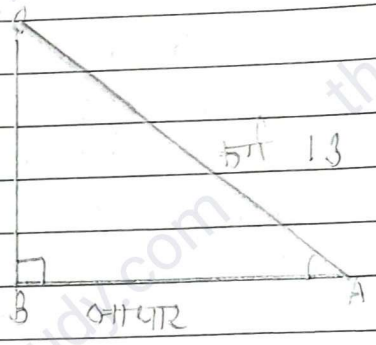
$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{15}{17}$

$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{17}{8}$

Rajshree
DATE: PAGE NO.:

प्रश्न 5 यदि $\sec\theta = \frac{13}{12}$ हो तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित कीजिए ?

हल $\sec\theta = \frac{13}{12} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$



कर्ण = 13
आधार = 12
लम्ब = ?

समकोण $\triangle ABC$ में पाइथागोरस प्रमेय से –

$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$

$(13)^2 = (\text{लम्ब})^2 + (12)^2$

$169 = (\text{लम्ब})^2 + 144$

$169 - 144 = (\text{लम्ब})^2$

$25 = (\text{लम्ब})^2$

$(5)^2 = (\text{लम्ब})^2$

$\boxed{\text{लम्ब} = 5}$

$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{5}{13}$

$\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{12}{13}$

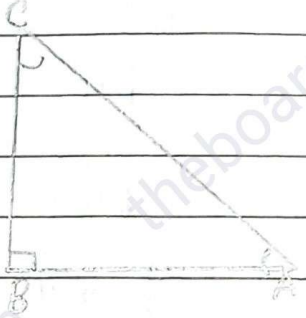
$\tan = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{5}{12}$

$\text{Cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{13}{5}$

$\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{12}{5}$

Rajshree
DATE: PAGE NO.

प्रश्न 8 यदि $\angle A$ और $\angle B$ न्यून कोण हो, जहाँ $\cos A = \cos B$ तो सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle B$



हल $\because \cos A = \cos B$ [दिया है]

$$\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

$$= \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB}$$

$$= AC = BC$$

हम जानते हैं कि दो बराबर भुजाओं के सामने के कोण भी बराबर होते हैं; अतः

$$\boxed{\angle A = \angle B}$$

प्रश्न 9 त्रिभुज ABC में जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

हल $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

लम्ब $= 1$

आधार $= \sqrt{3}$

कर्ण $= ?$

समकोण $\triangle ABC$ में पाइथागोरस प्रमेय से

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

Rajshree
DATE PAGE NO.

$$\text{कर्ण}^2 = (1)^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$\text{कर्ण}^2 = 1 + 3$$

$$\text{कर्ण}^2 = 4$$

$$\text{कर्ण}^x = (2)^x$$

$$\boxed{\text{कर्ण} = 2}$$

$$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin C = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos = = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{2}$$

(i) $\sin A \cos C + \cos A \cdot \sin C$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1+3}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = \boxed{1}$$

(ii) $\cos A \cdot \cos C - \sin A \sin C$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

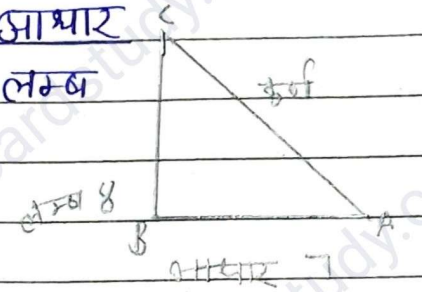
$$= 0$$

Rajshree
DATE: PAGE NO:

प्रश्न 7 यदि $\cot\theta = \frac{7}{8}$ तो (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$,

(ii) $\cot^2\theta$ का मान निकालिए ?

हल $\cot\theta = \frac{7}{8} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$



आधार = 7
लम्ब = 8
कर्ण = ?

समकोण △ पाइथगोरस प्रमेय से -

$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$

$\text{कर्ण}^2 = (8)^2 + (7)^2$

$\text{कर्ण}^2 = 64 + 49$

$\text{कर्ण}^2 = 64 + 49$

$\text{कर्ण}^2 = 113$

$\boxed{\text{कर्ण} = \sqrt{113}}$

(ii) $\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{8}{\sqrt{113}}$

$\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{7}{\sqrt{113}}$

$(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$

$(1+\cos)(1-\cos\theta)$

$\because (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

$= \frac{(1)^2 - (\sin\theta)^2}{(1)^2 - (\cos)^2}$

$= 1 - \left(\frac{8}{\sqrt{113}}\right)^2$

$- 1\left(\frac{7}{\sqrt{113}}\right)^2$

$= 1 - \frac{64}{113}$

$1 - \frac{49}{113}$

$\frac{113 - 64}{113}$

$\frac{113 - 49}{113}$

$= \frac{49}{64}$

(ii) $\cot^2 \theta$

$\left(\frac{7}{8}\right)^2$

$= \frac{49}{64}$ Ans

प्रश्न-11 बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है, या असत्य कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए

(1) $\tan A$ का मान सदैव 1 से कम होता है। असत्य

(2) कोण A के किसी मान के लिए $\sec A = \frac{12}{5}$ सत्य

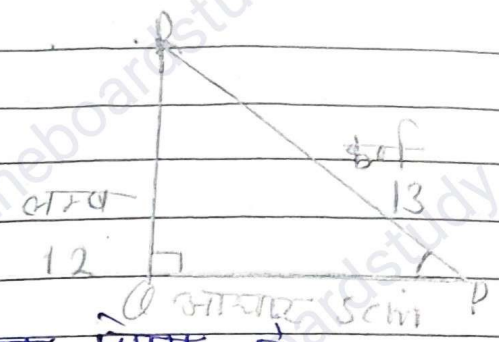
(3) $\cos A$, कोण A के Cosecant के प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है। असत्य

(4) $\cot A$, $\cot$ और A का गुणनफल होता है। असत्य

(5) किसी भी कोण θ के लिए $\sin \theta = \frac{4}{3}$ असत्य

प्रश्न-10 ΔPQR में जिसका कोण Q समकोण है, PR + R = 25 cm और PQ = 5 cm $\sin P$, $\cos P$ और $\tan P$ के मान ज्ञात कीजिए ?

Rajshree
DATE: _____ PAGE NO.: _____



Ex $PR + QR = 25$ — (1)

$\sin = ?$ $\cos p = ?$
$\tan p = ?$

समकोण $\triangle PQR$ में पाइथगोरस प्रमेय से —

कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2

$PR^2 = QR^2 + (5)^2$

$(PR)^2 - (QR)^2 = 25$

$= (PR - QR) \cdot (PR + QR) = 25$

सभी (1) से

$= (PR - QR) \cdot 25 = 25$

$= PR - QR = 1$ — (2)

सभी (1) वा (2) से

$PR + QR = 25$
$PR - QR = 1$

$2PR = 26$

$PR = \frac{26}{2}$ 13

$\boxed{PR = 13}$

सभी (1) से

$PR + QR = 25$

$13 + QR = 25$

$QR = 25 - 13$

$\boxed{QR = 12}$

$\sin p = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{12}{13}$

$\cos p = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{5}{13}$

$\tan p = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{12}{5}$

Rajshree

DATE: PAGE NO.:

Date 30/09/2024 सोमवार

$\angle A$	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित
$\operatorname{cosec} A$	अपरिभाषित	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec A$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अपरिभाषित
$\cot A$	अपरिभाषित	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

प्रश्नावली 8.2

प्रश्न 1 निम्नलिखित के मान निकालिए :-

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

हल $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{3+1}{4}$

$\frac{4}{4}$

$= 1$

(ii) $2\tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

हल $= (\tan 45°)^2 + (\cos 30°)^2 - (\sin 60°)^2$

$= 2 \cdot (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2 \times 1$

$\boxed{= 2}$

(iii) $\frac{\cos 45°}{\sec 30° + \operatorname{cosec} 30°}$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{1}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$2 + 2\sqrt{3}$

$\sqrt{3}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(2+2\sqrt{3})}$

(iv) $\frac{\sin 30° + \tan 45° - \operatorname{cosec} 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$

$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}}$

$\frac{1\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3}}$

$4 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}$

$\frac{1\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4}{4 + 1\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}$

$= \frac{3\sqrt{3} - 4}{4 + 3\sqrt{3}}$

$\frac{3\sqrt{3} - 4}{3\sqrt{3} + 4}$

Rajshree

DATE: PAGE NO.:

प्रश्न 2 सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिए:

हल (i) $\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$

$= \frac{2\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}}$

$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3+1}{3}}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4}\sqrt{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sin 60^\circ$

हल (ii) $\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$

$= \frac{1-(1)^2}{1+(1)^2}$

$= \frac{1-1}{1+1}$

$= \frac{0}{2}$

$= 0$

$\sin = 40^\circ$

हल (iv) $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$

$2\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\frac{3-1}{3}$

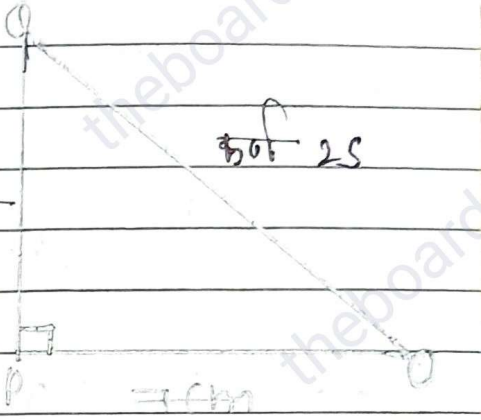
$\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\sqrt{3}$

$\tan 60^\circ$

Rajshree
DATE: PAGE NO:

उदा:5 $\triangle OPQ$ में, जिसका कोण P समकोण है, $OP = 7$ cm और $OQ - PQ = 1$ cm (देखिए आकृति 8.12) $\sin Q$ और $\cos Q$ के मान ज्ञात कीजिए?



हल $OQ - PQ = 1$ cm — (i)

$OP = 7$ cm

$\sin Q = ?$, $\cos Q = ?$

चूंकि समकोण $\triangle$ में पाइथागोरस प्रमेय से

$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$

$(OQ)^2 = (OP)^2 + (PQ)^2$

$(OQ)^2 - (PQ)^2 = (7)^2$

$(OQ - PQ) \cdot (OQ + PQ) = 49$

समी (i) से -

$OQ + PQ = 1$ — (ii)

$(OQ + PQ) \cdot 1 = 49$

$OQ + PQ = \frac{49}{1}$

$OQ + PQ = 49$ — (ii)

समी (i) व (ii) से

$OQ - PQ = 1$ — (i)

$OQ + PQ = 49$ — (ii)

$2OQ = 50$

$2OQ = 50$

$OQ = \frac{50}{2}$

$\boxed{OQ = 25}$

समी (i) से

$OQ - PQ = 1$

$25 - PQ = 1$

$-PQ = 1 - 25$

$\times \quad PQ = +25$

$\boxed{PQ = 24}$

$\sin = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{7}{25}$

$\cos Q = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{24}{25}$

Rajshree
DATE PAGE NO

प्रश्न 3 यदि $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ और $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $0° < A+B \leq 90°$; $A > B$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिए?

हल दिया है —

$$\tan(A+B) = \sqrt{3}$$

ज्ञात करना है —

A और B का मान

हल $\tan(A+B) = \sqrt{3}$

$= \tan(A+B) = \tan 60°$

$= A+B = 60° \quad \text{——} (i)$

पुनः प्रश्नानुसार :-

$$\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\tan(A-B) = \tan 30°$

$A - B = 30 \quad \text{——} (ii)$

समी (i) व (ii) से

$A + B = 60$

$A - B = 30$

$2A = 90$

$A = \frac{90}{2}$

$\boxed{A = 45}$

A का मान समी (i) में रखने पर

$A + B = 60$

$45 + B = 60$

$B = 60 - 45$

$\boxed{B = 15}$

$A = 45°$

$B = 15°$

Rajshree
DATE: PAGE NO.:

उदाहरणावली 8.3

Formulae

(1) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$

$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$\sin = \sqrt{1 - \cos^2 A}$

(2) $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

$\tan^2 A \quad \sec^2 A - 1$

$\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

(3) $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

$\cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A - 1$

$\cot A = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}$

$\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

(1) $\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$

(2) $\cos A = \frac{1}{\sec A}$

(3) $\tan A = \frac{1}{\cot A}$

(4) $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$

(5) $\sec A = \frac{1}{\cos A}$

(6) $\cot A = \frac{1}{\tan A}$

(7) $\tan = \frac{\sin A}{\cos A}$

(8) $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

Rajshree
DATE _____ PAGE NO. _____

Q (i) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ को सिद्ध कीजिए ?

हल समकोण ΔABC में पाइथगोरस प्रमेय से -

(कर्ण)^2 = लम्ब^2 + आधार^2

$= (AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$

$= AC^2 = BC^2 + AB^2$

दोनो पक्षो में AC^2 से भाग देने पर

$$\frac{AC^2}{AC^2} = \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$= 1 = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

$$= 1 = \left(\frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}\right)^2 + \left(\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}\right)^2$$

$$\therefore 1 = (\sin A)^2 + (\cos A)^2$$

$$1 = \sin^2 A + \cos^2 A$$

$$\sin A \cos^2 A = 1$$

इति सिद्धम् प्रमेय

Rajshree
DATE: PAGE NO:

उदा 8 यदि $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$, $0^\circ < A+B \leq 90^\circ$ $A > B$, तो A और B ज्ञात कीजिए?

हल $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$

$A = ?$ $B = ?$

$\because \sin(A-B) = \frac{1}{2}$

$\sin(A-B) = \sin 30^\circ$

$A - B = 30 \quad \text{---} (1)$

$\because \cos(A+B) = \frac{1}{2}$

$\cos(A+B) = \cos 60^\circ$

$A + B = 60 \quad \text{---} (2)$

समी (1) व (2) से -

$A - B = 30$

$A + B = 60$

$2A = 90$

$A = \frac{90}{2}$

$\boxed{A = 45}$

समी (1) से

$A - B = 30$

$45 - B = 30$

$-B = 30 - 45$

$-B = -15$

$\boxed{B = 15}$

उदा 9 अनुपातों $\cos A$, $\tan A$ और $\sec A$ को $\sin A$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल

$\cos A$, $\tan$, $\sec A$

$\because \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$

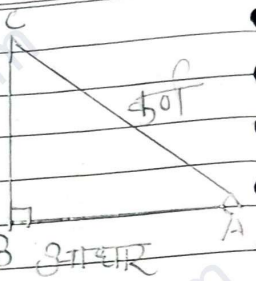
$\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$

$\because \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$

Rajshree
DATE _____ PAGE NO _____

Q-5 सिद्ध करो कि $1+\tan^2 A = \sec^2 A$?

हल समकोण $\triangle ABC$ में पाइथगोरस प्रमेय से



$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$

दोनो पक्षो में आधार^2 का भाग देने पर –

$$\frac{\text{कर्ण}^2}{\text{आधार}^2} = \frac{\text{लम्ब}^2}{\text{आधार}^2} + \frac{\text{आधार}^2}{\text{आधार}^2}$$

$$\left(\frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}\right)^2 = \left(\frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}\right)^2 + 1$$

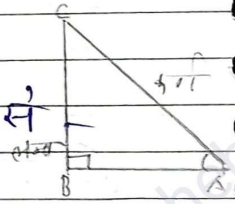
$$(\sec A)^2 = (\tan A)^2 + 1$$

$$\sec^2 A = \tan^2 A + 1$$

$$\boxed{1+\tan^2 A = \sec^2 A}$$

Q-6 सिद्ध करो कि $1+\cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

हल समकोण $\triangle ABC$ में पाइथगोरस प्रमेय से



$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$

दोनो पक्षो में लम्ब^2 का भाग देने पर

$$\frac{\text{कर्ण}^2}{\text{लम्ब}^2} = \frac{\text{लम्ब}^2}{\text{लम्ब}^2} + \frac{\text{आधार}^2}{\text{लम्ब}^2}$$

$$\left(\frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}\right)^2$$

$$(\operatorname{cosec} A)^2 = 1 + (\cot A)^2$$

$$\boxed{\operatorname{cosec}^2 A = 1+\cot^2 A}$$

$$\boxed{1+\cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A}$$

उदा-10 सिद्ध कीजिए कि

हल LHS

$\sec A(1-\sin A$

$\sec A(1-\sin A$

$= \frac{1}{\cos A}(1-\sin$

$= \frac{1}{\cos A}(1-\sin$

$= (1-\sin A$

$\cos^2$

$= (1)^2 - (\sin$

$\cos^2 A$

$= \frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$\cos^2 A$

उदा 09 अनुपातो के पदो

हल $\because \cot A =$

$\because \tan =$

उदा-10 सिद्ध कीजिए कि $\sec A(1-\sin A)(\sec A+\tan A)=1$?

LHS

हल $\sec A(1-\sin A)\cdot(\sec A+\tan A)=1$

$\sec A(1-\sin A)(\sec A+\tan A)$

$=\frac{1}{\cos A}(1-\sin A)\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)$

$=\frac{1}{\cos A}(1-\sin A)\cdot\frac{(1+\sin A)}{\cos A}$

$=\frac{(1-\sin A)\cdot(1+\sin A)}{\cos^2 A}$

$=\frac{(1)^2-(\sin A)^2}{\cos^2 A}$

$=\frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}$ $\quad 1-\sin^2 A=\cos^2 A$

$\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}$ RHS

उदा 9 अनुपातों के पदों $\cos A$, $\tan A$ में और $\sec A$ को व्यक्त कीजिए $\sin A$!

हल $\because \cos A=\sqrt{1-\sin A}$

$\because \tan=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$

Rajshree
DATE: PAGE NO.:

$\therefore \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$ Ans

उदा: 11 सिद्ध कीजिए की $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

~~sol~~ $\frac{\cot A - \cos A}{\cot + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

L.H.S :-

$\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A}$

$= \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\cos A + \cos A}$
$\sin A$

$\therefore \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

$\Rightarrow \frac{\cos A \left[\frac{1}{\sin A} - 1\right]}{\cos A \left[\frac{1}{\sin A} + 1\right]}$ $\therefore 1 \operatorname{cosec} A = \sin A$

$= \left[\frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}\right]$ R.H.S Any

Rajshree
DATE _____ PAGE NO _____

Q-1 त्रिकोणमितीय अनुपातो के $\cot A$ के पदो में $\sin A$ $\sec A$ और $\tan A$ ज्ञात कीजिए ?

हल $\sin A$, $\sec A$, $\tan A$

$$\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$$

$\because 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

$$= \operatorname{cosec} A = \sqrt{1 - \cot^2 A}$$

$$= \boxed{\sin A = \frac{1}{\sqrt{1 - \cot^2 A}}}$$

$$= \sec A = \sqrt{1 + \frac{1}{\cot^2 A}}$$

$$\Rightarrow \sec A = \sqrt{1 + \tan^2 A}$$

$$\boxed{\tan A = \frac{1}{\cot A}}$$

Q-3 सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प के पुष्टि कीजिए ?

(i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$ बराबर है :-

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

Rajshree

DATE PAGE NO.:

Sol $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$

$9[\sec^2 A - \tan^2 A]$ $\because 1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

$1 = \sec^2 A - \tan^2 A$

$= 9 \times 1$

$= 9$ Ans.

(ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$ का मान है :-

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) -1

Sol 2

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$ बराबर है :-

(a) $\sec A$ (b) $\sin A$ (c) $\operatorname{cosec} A$ (d) $\cos A$

Sol

$(\sec A + \tan)(1 - \sin A)$

$= \left[\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right] \cdot (1 - \sin A)$

$= \frac{(1 + \sin A)}{\cos A} \quad (1 - \sin A)$

$= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos A}$

$\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A$

$= \frac{\cos^2 A}{\cos A}$

$\cos A$

(iv) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$ बराबर है :-

(a) $\sec^2 A$ (b) -1 (c) $\cot^2 A$ ~~(d) $\tan^2 A$~~

हल $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$

$= \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A}$

$= \frac{1}{\cos^2 A}$

$\frac{1}{\cot^2 A}$

$= \frac{1}{\cos^2 A \times \frac{\sin^2 A}{1}}$

$= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$= \boxed{\tan^2 A}$ Ans.

Q-4 निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यून कोण है।

(i) $(\operatorname{cosec}\theta - \cot A)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

Rajshree

DATE PAGE NO.

Ex L.H.S

$$\text{Cosec}\theta - \text{Cot}\theta)^2$$

$$= \left[\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]^2$$

$$\left[\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right]^2$$

$\because \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$$\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} \quad \because a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$ R.H.S Ans.

(ii) $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

Rajshree
DATE: PAGE NO.:

L.H.S. -

$$\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos A \cdot \cos A + (1+\sin A)\cdot(1+\sin A)}{(1+\sin A)\cdot \cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A + 1 + \sin A + \sin + \sin A}{(1+\sin A)\cdot \cos A}$$

$$\frac{\cos^2 A + 1 + \sin A + 2\sin A}{(1+\sin^2 A)\cdot \cos A}$$

$\therefore \cos^2 A + \sin A = 1$

$$\frac{1+1+2\sin A}{(1+\sin A)\cdot \cos A}$$

$$= \frac{2+2\sin A}{(1+\sin A)\cdot \cos A}$$

$$= \frac{2(1+\sin A)}{(1+\sin A)\cdot \cos A}$$

$$\frac{2\cdot 1}{\cos A}$$

$$= 2 \cdot \sec A$$

2 Sec A R.H.S.

L.H.S. = R.H.S.

Rajshree

DATE: PAGE NO:

(iii) $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

Sol

R.H.S -

$$\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$$

$\because \sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$$= \frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}$$

$\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$= \frac{(1-\cos A)(1+\cos A)}{1-\cos A}$$

$$= 1 + \cos A$$

$$1 + \frac{1}{\sec A}$$

$$= \frac{\sec A + 1}{\sec A}$$

$$= \frac{1 + \sec A}{\sec A}$$

L.H.S.

R.H.S. = L.H.S

(iv) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

हल L.H.S - $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}$

हर का परिमेयकरण करने पर

$$\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A} \times \frac{1+\sin A}{1+\sin A}}$$

$\because a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$$\sqrt{\frac{(1+\sin A)(1+\sin A)}{(1-\sin A)(1+\sin A)}}$$

$$\sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{(1)^2 - \sin^2 A}}$$

$$\sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}} \quad \because \cos^2 A = 1-\sin^2 A$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1+\sin A}{\cos A}\right)^2}$$

$$= \frac{1+\sin A}{\cos A} \quad \because \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

Rajshree
DATE _____ PAGE NO: _____

$\Rightarrow \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$ $\quad \because \tan = \frac{\sin A}{\cos A}$

$= \boxed{\sec A + \tan A}$ R.H.S

$\boxed{L.H.S = R.H.S}$ Ans.

(v) $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

Ed

L.H.S

$\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{1 - 2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta - 1}$ $\quad \because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \tan\theta = \frac{1 - 2(1 - \cos^2\theta)}{2\cos^2\theta - 1}$ $\quad \because \sin\theta = 1 - \cos^2\theta$

$= \tan\theta = \frac{1 - 2 + 2\cos^2\theta}{2\cos^2\theta - 1}$

$= \tan\theta = \frac{-1 + 2\cos^2\theta}{2\cos^2\theta - 1}$

(vi)

Ed

Rajshree
DATE _____ PAGE NO _____

$$\tan\theta = \frac{2\cos^2\theta \cdot 1}{2\cos^2\theta - 1}$$

$\tan\theta$ RHS.

LHS = RHS. Ans

(vi) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

LHS

$$(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$$

$\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$$= (\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2\sin A \cdot \operatorname{cosec} A) + (\cos^2 A + \sec^2 A + 2\cos A \sec A)$$

$$= \left(\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2 \cdot \sin A \cdot \frac{1}{\sin A}\right) + \cos^2 A + \sec^2 A + 2 \cdot \frac{\cos A}{\cos A}$$

$$= \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2 + \cos^2 A + \sec^2 A + 2$$

$$= 4 + \sin^2 A \operatorname{cosec}^2 A + \cos^2 A + \sec^2 A$$

$$= 4 + \sin^2 A + \cos^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$$

$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$$= 4 + 1 + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$$

$$= 5 + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$$

$\because 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

Rajshree

DATE _____ PAGE NO. _____

$= 5 + 1 + \cot^2 A + \sec^2 A$

$\because 1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

$= 5 + 1 + \cot^2 A + 1 + \tan^2 A$

$= 7 + \cot^2 A + \tan^2 A$

$= \boxed{7 + \tan^2 A + \cot^2 A}$ R.H.S

$\boxed{\text{L.H.S.} = \text{R.H.S}}$ Proved