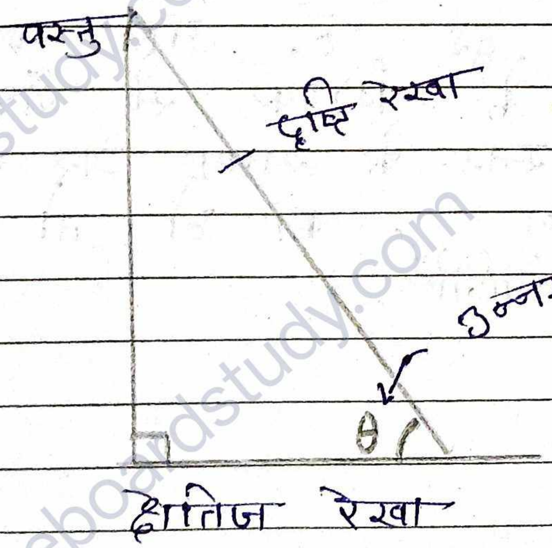
Chapter-09

त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

परिभाषा :-

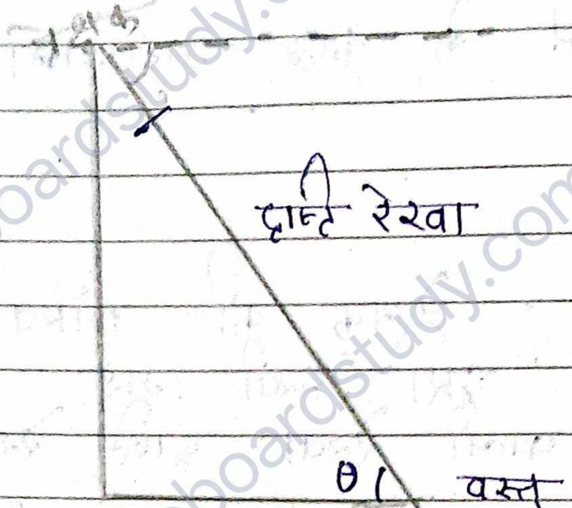
(1) दृष्टि रेखा :- प्रेक्षक की आँख से प्रेक्षक द्वारा देखी गई वस्तु के बिन्दु को मिलने वाली रेखा दृष्टि रेखा कहलाती है।

(2) **उन्नयन कोण** :- यदि प्रेक्षक निचे व वस्तु ऊपर स्थित हो तो दृष्टि रेखा व क्षैतिज रेखा के बीच बनाना कोण को उन्नयन कोण कहते है।



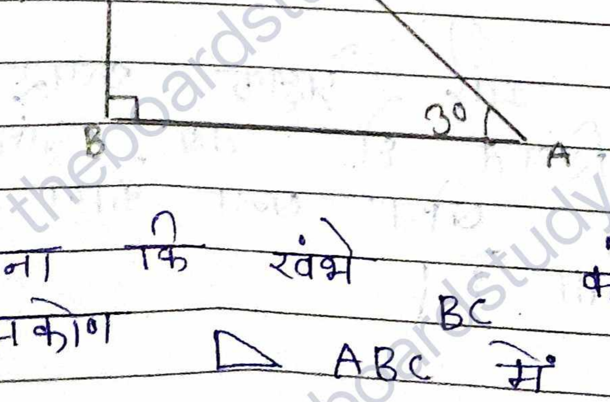
(3) **अवनमन कोण** :- यदि प्रेक्षक ऊपर व वस्तु निचे स्थित हो तब दृष्टि रेखा व क्षैतिज के बीच बना कोण अवनमन कोण कहलाता है।

theboardstudy.com



प्रश्नावली : 9.1

प्रश्न - 1 सर्कस का एक कलाकार एक 20 m लंबी डोर पर चढ़ रहा है, जो अच्छी तरह से तनी हुई है, और भूमि पर सीधे लगे खंभे के शिखर से बंधा हुआ है। यदि भूमि स्तर के साथ डोर द्वारा बनाया गया कोण 30° का हो तो खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए -



माना कि खंभे BC की ऊँचाई h मीटर है,
समकोण △ ABC में

$\sin\theta = \frac{लम्ब}{कर्ण} = \frac{BC}{AC}$

$= \sin 30^\circ = \frac{h}{20}$

$= \frac{1}{2} = \frac{h}{20}$

$= 2 \times h = 20 \times 1$

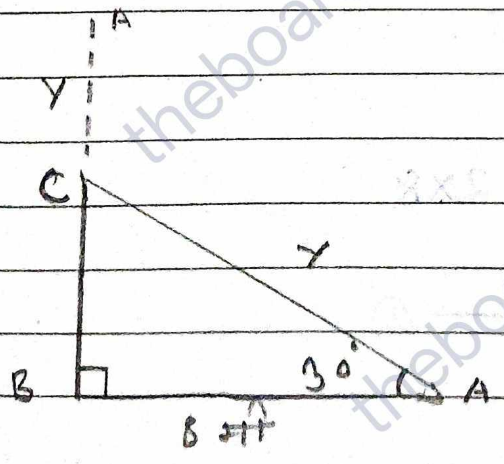
$= h = \frac{20}{2}$ 10

$\Rightarrow h = 10$

अतः खंभे की ऊँचाई BC = 10 मी है।

Imp प्रश्न 2 आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है, कि पेड़ की शिखर जमीन को छूने लगता है, और इसके साथ 30° का कोण बनाता है। पेड़ के पाद बिन्दु की दूरी, जहाँ पेड़ शिखर जमीन को छूता है, 8 m है, पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए?

हल



theboardstudy.com

Date:
P. No:

माना कि पेड़ $_{AB}$ की कुल ऊँचाई $(x+y)$ मीटर है।

समकोण $\triangle ABC$ में

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{8}$$

$$= x \times \sqrt{3} = 1 \times 8$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{3}} \quad \text{--- (1)}$$

$$\because \cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$

$$= \cos 30^\circ = \frac{8}{y}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{y}$$

$$= \sqrt{3} \times y = 2 \times 8$$

$$y = \frac{16}{\sqrt{3}} \quad \text{--- (2)}$$

theboardstudy.com

Date:
P. No:

पेड़ की कुल ऊँचाई

$$AB = x + y$$

$$AB = \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$AB = \frac{8+16}{\sqrt{3}}$$

$$AB = \frac{24}{\sqrt{3}}$$

$$AB = \frac{24 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

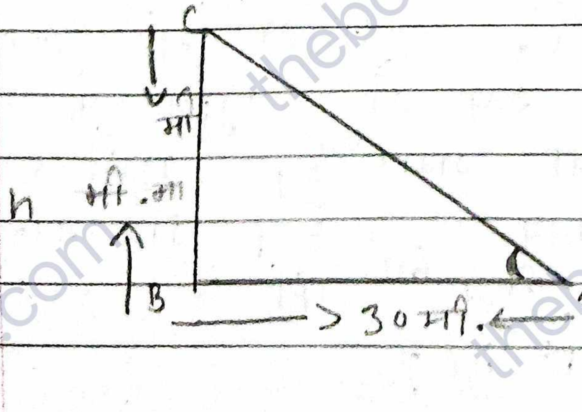
$$AB = \frac{\overset{8}{\cancel{24}}\sqrt{3}}{\cancel{3}}$$

$$AB = 8\sqrt{3}$$

अत: पेड़ की कुल ऊँचाई $8\sqrt{3}$ मीटर है।

प्रश्न 4 भूमि के एक बिंदु से जो मीनार के पाद बिन्दु से ~~की~~ की दूरी पर है, मीनार के शिखर 30m का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल



Date:
P. No:

माना कि मिनार BC की ऊँचाई h मीटर है।

समकोण △ABC में

$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB}$

$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{h}{30}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$

$= \sqrt{3} \times h = 1 \times 30$

$\Rightarrow h = \frac{30}{\sqrt{3}}$

$= h = \frac{30 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$

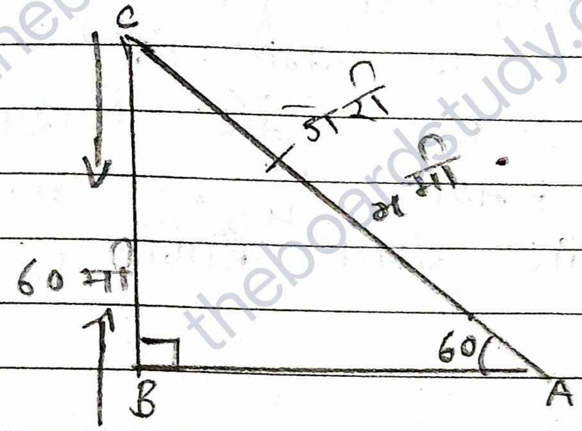
$\Rightarrow h = \frac{30\sqrt{3}}{3}$

$h = 10\sqrt{3}$

अतः मीनार BC की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ मी. है।

Imp
प्रश्न-5 भूमि से 60 m की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिन्दु से बांध दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर कि डोरी में कोई ढील नहीं है, डोरी की लंबाई ज्ञात किजिए?

हल



माना कि डोरी AB की लम्बाई x मीटर है,
तब समकोण $\triangle ABC$ में

$$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{60}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{x}$$

$$= \sqrt{3} \times x = 60 \times 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{120}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{120 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\overset{40}{\cancel{120}}\sqrt{3}}{\cancel{3}}$$

$$= x = 40\sqrt{3}$$

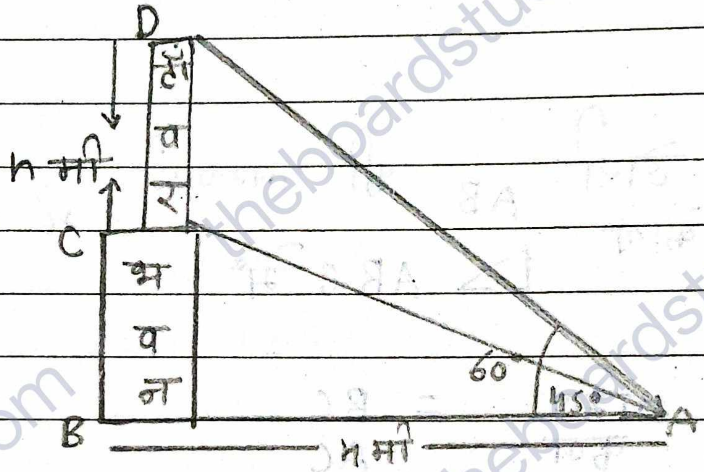
अतः डोरी AC की लंबाई $40\sqrt{3}$ मीटर है।

theboardstudy.com

Date:
P. No:

प्रश्न-7 (Imp) भूमि के एक बिंदु से एक 20 m. ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल



माना कि टॉवर CD की ऊँचाई h मीटर है

समकोण △ ABC में

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{20}{x}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{20}{x}$$

$$\Rightarrow x = 20 \text{ मीटर} \quad \text{——(1)}$$

समको △ ABD में

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BD}{AB}$$

Date:
P. No:

$\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{20+h}{x}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{20+h}{x}$

$= x\sqrt{3} = 20+h$

समी ① से

$\Rightarrow 20\sqrt{3} = 20+h$

$= 20\sqrt{3} = 20 = h$

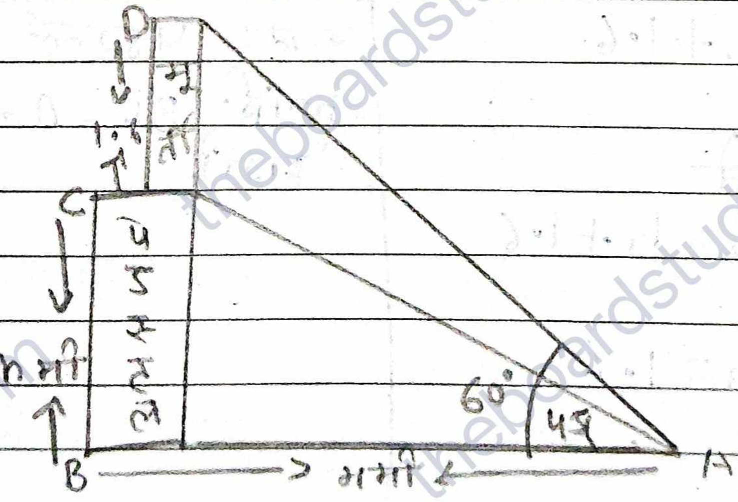
$= 20(\sqrt{3}-1) = h$

$\Rightarrow h = 20(\sqrt{3}-1)$ मीटर

अतः टॉवर CD की ऊँचाई $20(\sqrt{3}-1)$ होगी।

Imp
प्रश्न-8 एक पेडेस्टल के शिखर पर एक 1.6 m ऊँची मूर्ति लगी है। भूमि के एक बिंदु से मूर्ति के शिखर का उन्नयन कोण 60° है, और उसी बिंदु से पेडस्टल के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। पेडस्टल की ऊँचाई ज्ञात कीजि

हल



theboardstudy.com

Date:
P. No:

माना कि पेडस्टल BC की ऊँचाई h मीटर है
समकोण △ABC में

$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB}$

$\Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{h}{x}$

$= 1 = \frac{h}{x}$

$\Rightarrow x = h$ —— ①

समकोण △ABC में

$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BD}{AB}$

$\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{h+1.6}{x}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h+1.6}{x}$

$\Rightarrow x\sqrt{3} = h+1.6$

समी ① से

$= h\sqrt{3} = h+1.6$

$= h\sqrt{3} - h = 1.6$

$\Rightarrow h(\sqrt{3}-1) = 1.6$

$\Rightarrow h = \frac{1.6}{\sqrt{3}-1}$

$\Rightarrow h = \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$\Rightarrow h = \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2-(1)}$

$\Rightarrow h = \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{3-1}$

$\Rightarrow h = \frac{\overset{0.8}{\cancel{1.6}}(\sqrt{3}+1)}{\cancel{2}}$

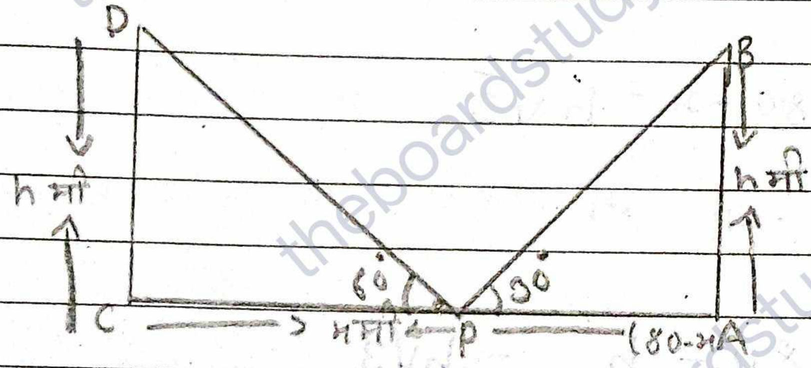
$= h = 0.8(\sqrt{3}+1)$ मीटर

अतः पेडस्टल की ऊँचाई $BC = 0.8(\sqrt{3}+1)$m होगी

Date:
P. No:

प्रश्न 9 एक मीनार के पाद-बिंदु से एक भवन के शिखर का उन्नमन कोण 30° है, और भवन के पाद-बिन्दु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार 50 m ऊँची हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजि

हल



माना की दोनो खंभो की ऊँचाई h मीटर है।

समकोण $\triangle PCD$

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{CD}{PC}$$

$$\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{3} = h$$

$$\Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad \text{——} (1)$$

समकोण $\triangle PAB$ में

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AB}{PA}$$

theboardstudy.com

Date:
P. No:

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{80-x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{80-x}$$

$$\Rightarrow 80 - x = h\sqrt{3}$$

समी. ① से

$$\Rightarrow 80 - \frac{h}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 80 = \frac{h\sqrt{3}}{1} + \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 80 = \frac{3h + h}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 80 = \frac{4h}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 80\sqrt{3} = 4h$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{20}{\cancel{80}}\sqrt{3}}{4} = h$$

$$= h = 20\sqrt{3}$$

समी. ① से

theboardstudy.com

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$x = 20$ मीटर

अतः दोनो की ऊँचाई $h = 20\sqrt{3}$ मीटर

पहली खंभे के प्रेक्षक की दूरी $= x = 20$ मी

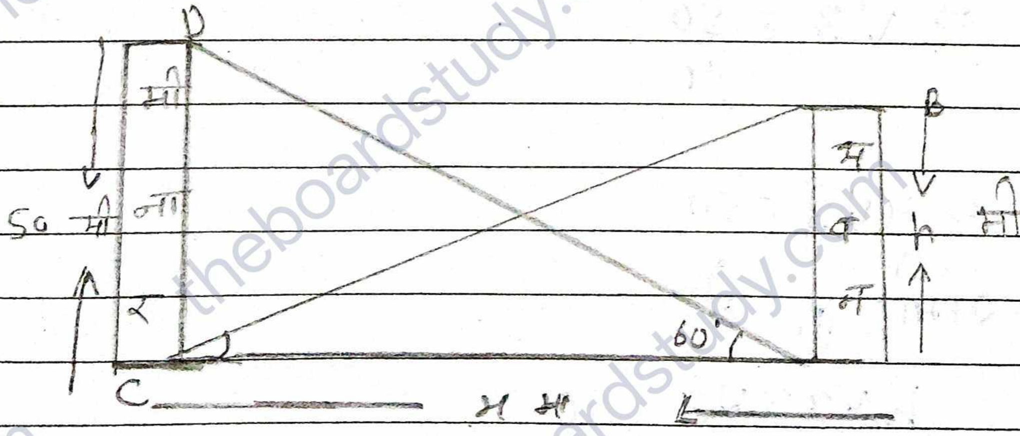
दूसरे खंभे से प्रेक्षक की दूरी $= 80 - x$

$= 80 - 20$

$= 60$ मीटर

प्रश्न 10 एक 80 m चौड़ी सड़क के दोनो ओर आमने - सामने समान लंबाई वाले दो खंभे लगे हुए है। इन दोनो खंभो के बिच सड़क के एक बिंदु से खंभो के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः $60°$ और $30°$ है। खंभो की ऊँचाई और खंभो की ऊँचाई और खंभो से बिन्दु की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल



माना कि भवन AB की ऊँचाई h मीटर

समकोण $\triangle$ CAB

$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{h}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x}$

$\Rightarrow x = h\sqrt{3}$ —— (1)

समकोण $\triangle$ ACD में

$\tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{CD}{AC}$

$\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{50}{x}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{50}{x}$

$\Rightarrow x\sqrt{3} = 50$

समी (1) से

$h\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 50$

$\Rightarrow 3h = 50$

theboardstudy.com

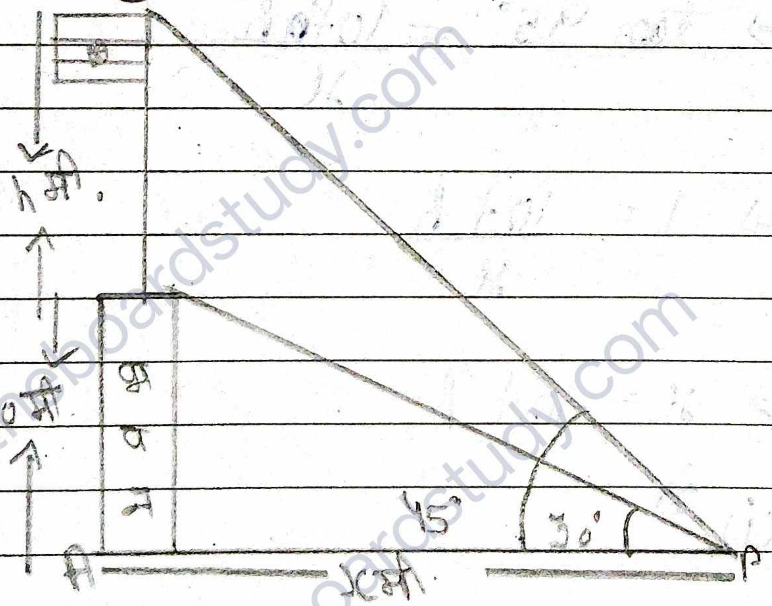
$\Rightarrow h = \frac{50}{3}$

$h = 16\frac{2}{3}$ मीटर

अतः भवन AB की ऊँचाई $16\frac{2}{3}$ मी है।

Imp.

उदा-4 भूमि के एक बिंदु P से एक 10 m ऊँचे भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। भवन के शिखर पर एक ध्वज को लहराया गया है, और P से ध्वज के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। ध्वजदंड की लंबाई और बिंदु P से भवन की दूरी ज्ञात कीजिए। (यहाँ आप $\sqrt{3} = 1.732$ ले सकते हैं)



माना कि झण्डे BC की लम्बाई h मीटर है तथा बिंदु P से भवन की दूरी x मीटर है।

समकोण $\triangle PAB$ मे AB

Date:
P. No:

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AB}{AP}$$

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{10}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{x}$$

$$\Rightarrow x = 10\sqrt{3} \text{ --- (i)}$$

समकोण ΔPAC मे

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{AP}$$

$$\Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{10+h}{x}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{10+h}{x}$$

$$\Rightarrow x = 10+h$$

समी. (i) से

$$\Rightarrow 10\sqrt{3} = 10+h$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{3} - 10 = h$$

$$\Rightarrow 10(\sqrt{3}-1) = h$$

$\because \sqrt{3} = 1.732$

$h = 10[1.732 - 1]$

$\Rightarrow h = 10 \times 0.732$

$\Rightarrow h = 7.320$

अतः झण्डे की लम्बाई $h = 7.32$ मीटर है

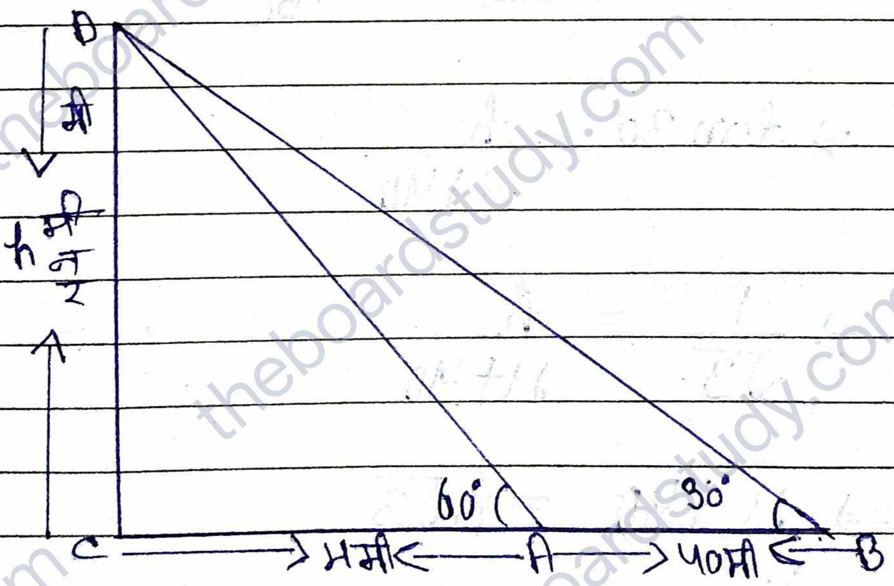
बिन्दु P से भवन AB की दूरी $H = 10\sqrt{3} = 10 \times 1.732$

$\Rightarrow 17.320$

$\Rightarrow 17.32$ मीटर

उदा॰ 5 एक समतल जमीन पर खड़ी मीनार की छाया उस स्थिति में 40m अधिक लंबी हो जाती है जबकी सूर्य का उन्नतांश 60° से घटकर 30° हो जाता है अर्थात छाया के एक सिरे से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और AB छाया की लंबाई है जबकी उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए

हलः



Date:
P. No:

माना की मीनार CD की ऊँचाई h मीटर है

समकोण ΔACD में

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{CD}{AC}$$

$$\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{3} = h$$

$$\Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad \text{---(i)}$$

समकोण ΔBCD में

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{CD}{BC}$$

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{h}{x+40}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40}$$

$$\Rightarrow x+40 = h\sqrt{3}$$

समी. (i) से

$$\Rightarrow \frac{h}{\sqrt{3}} + \frac{40}{1} = h\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{h + 40\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h + 40\sqrt{3} = h\sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h + 40\sqrt{3} = 3h$$

$$\Rightarrow 40\sqrt{3} = 3h - h$$

$$\Rightarrow 40\sqrt{3} = 2h$$

$$\Rightarrow h = \frac{\overset{20}{\cancel{40}}\sqrt{3}}{\cancel{2}_1}$$

$$\Rightarrow h = 20\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

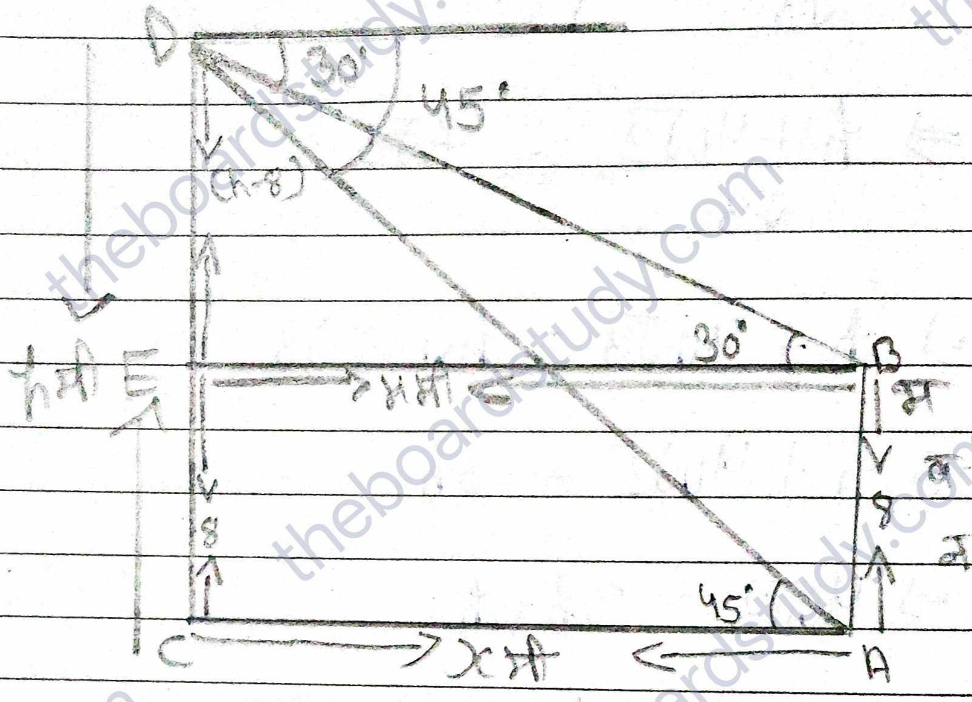
अतः मीनार (CD) की ऊँचाई $h = 20\sqrt{3}$ मीटर होगी।

उदा॰ 6 एक बहुमंजिल भवन के शिखर से देखने पर एक 8 m ऊँचे भवन के शिखर और तल के अवनमन - कोण क्रमशः 30° और 45° है। बहुमंजिल भवन की ऊँचाई और दो भवनों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

theboardstudy.com

Date:
P. No:

हल:



माना कि बहुमंजिला भवन CD की ऊंचाई h मीटर है तथा दोनो भवन के बीच की दूरी AC = x मीटर है। समकोण △ ACD में

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{CD}{AC}$$

$$\Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow x = h \text{ —— (i)}$$

समकोण △ BED में

theboardstudy.com

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{ED}{EB}$$

$$\tan 30° = \frac{h-8}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h-8}{x}$$

$$\Rightarrow x = (h-8)\sqrt{3}$$

समी. (1) से

$$h = h\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 8\sqrt{3} = h\sqrt{3} - h$$

$$\Rightarrow 8\sqrt{3} = h(\sqrt{3}-1)$$

$$\Rightarrow h = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$\Rightarrow h = \frac{8\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$\Rightarrow h = \frac{8(3+\sqrt{3})}{(\sqrt{3})^2-(1)^2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{8(3+\sqrt{3})}{3+3-1}$$

$$\Rightarrow h = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}(3+\sqrt{3})}{\cancel{2}}$$

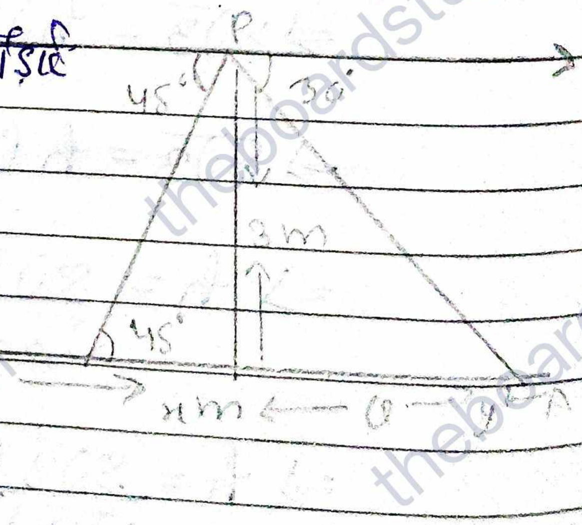
$$\Rightarrow h = 4(3+\sqrt{3})$$

अतः बहुमंजिला भवन की ऊँचाई $h = 4(3+\sqrt{3})$
मीटर भवनों के बीच की दूरी $x = h$

$x = 4(3+\sqrt{3})$ मीटर

प्रश्न.07 एक नदी के पुल के एक बिन्दु से नदी के सम्मुख किनारों के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° है। यदि पुल किनारों से 3m की ऊँचाई पर होता हो तो नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए?

हल माना की नदी AB की चौड़ाई $(x+y)$ मीटर है।



समकोण $\triangle PQB$ में

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{PQ}{QB}$$

$$\Rightarrow \tan 45° = \frac{3}{x}$$

$$1 = \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 3} \quad \text{—(i)}$$

समकोण $\triangle PQA$ में -

5

Date:
P. No:

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{PQ}{QA}$

$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{3}{y}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{y}$

$\Rightarrow y = 3\sqrt{3}$ —— (ii)

नदी की चौड़ाई $AB = (x+y)$

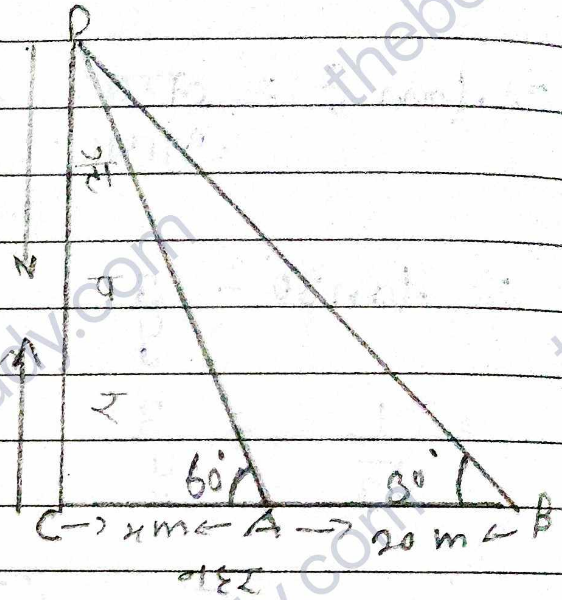
$= AB = 3+3\sqrt{3}$

$= \boxed{AB\ 3(1+\sqrt{3})\ m}$

अतः नदी AB की चौड़ाई $3(1+\sqrt{3})$ मीटर है। Ans

प्रश्न 9 एक नहर के एक तट पर टीवी टॉवर ऊर्ध्वाधरतः खड़ा है। टॉवर के ठीक सामने दूसरे तट के एक अन्य बिन्दु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। इसी तट पर इस बिन्दु से 20 m दूर और इस बिंदु को मीनार के पाद से मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक अन्य बिन्दु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। (देखिए आकृति 9.12) टॉवर की ऊँचाई और नहर की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल समकोण $\triangle ACD$ में -



$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \quad \frac{CD}{AC}$

$\Rightarrow \tan 60 = \frac{h}{x}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$

$\Rightarrow x\sqrt{3} = h$

$\Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ —— (1)

समकोण $\triangle BCD$ में

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{CD}{BC}$

$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{h}{x+20}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+20}$

$\Rightarrow x+20 = h\sqrt{3}$

समी (i) से

$\frac{h}{\sqrt{3}} + \frac{20}{1} = h\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{h + 20\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h + 20\sqrt{3} = h\sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h + 20\sqrt{3} = 3h$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{3} = 3h - h$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{3} = 2h$$

$$\Rightarrow 2h = 20\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = \frac{20\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = 10\sqrt{3}\ m}$$

समी (i) से

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 10m}$$

अतः टॉवर की ऊँचाई $h = 10\sqrt{3}$ m

नहर की चौड़ाई $x = 10$ मीटर है।

theboardstudy.com