Rajshree
DATE: _____ PAGE NO.: _____

प्रश्नावली 8.3

Formulae

(1) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$

$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$\sin = \sqrt{1 - \cos^2 A}$

(2) $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

$\tan^2 A \quad \sec^2 A - 1$

$\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

(3) $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

$\cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A - 1$

$\cot A = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}$

$\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

(1) $\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$

(2) $\cos A = \frac{1}{\sec A}$

(3) $\tan A = \frac{1}{\cot A}$

(4) $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$

(5) $\sec A = \frac{1}{\cos A}$

(6) $\cot A = \frac{1}{\tan A}$

(7) $\tan = \frac{\sin A}{\cos A}$

(8) $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

theboardstudy.com

Q ~~1~~ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ को सिद्ध कीजिए ?

हल समकोण ΔABC में पाइथगोरस प्रमेय से -

(कर्ण)^2 = लम्ब^2 + आधार^2

$= (AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$

$= AC^2 = BC^2 + AB^2$

दोनो पक्षो में AC^2 से भाग देने पर

$$\frac{AC^2}{AC^2} = \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$= 1 = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

$$= 1 = \left(\frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}\right)^2 + \left(\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}\right)^2$$

$$\therefore 1 = (\sin A)^2 + (\cos A)^2$$

$$1 = \sin^2 A + \cos^2 A$$

$$\sin A \cos^2 A = 1$$

इति सिद्धम् प्रमेय

उदा:8 यदि $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$, $0^\circ < A+B \leq 90^\circ$ $A > B$, तो A और B ज्ञात कीजिए?

हल $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$

$A = ?$ $B = ?$

$\because \sin(A-B) = \frac{1}{2}$

$\sin(A-B) = \sin 30^\circ$

$A - B = 30$ ——— (I)

$\because \cos(A+B) = \frac{1}{2}$

$\cos(A+B) = \cos 60^\circ$

$A + B = 60$ ——— (II)

समी (I) व (II) से -

$A - B = 30$

$A + B = 60$

$2A = 90$

$A = \frac{90}{2}$

$\boxed{A = 45}$

समी (I) से

$A - B = 30$

$45 - B = 30$

$-B = 30 - 45$

$+B = +15$

$\boxed{B = 15}$

उदा:-9 अनुपातों $\cos A$, $\tan A$ और $\sec$ को $\sin A$ के पदों में व्यक्त कीजिए

हल

$\cos A$, $\tan$, $\sec A$

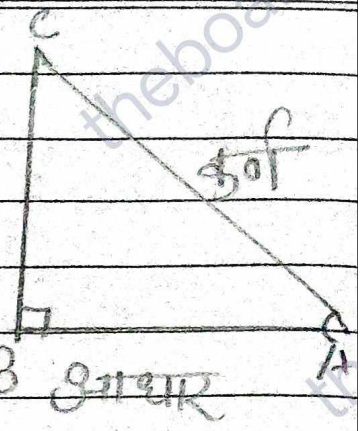
$\because \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$

$\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$

$\because \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$

Q-5 सिद्ध करो कि $1+\tan^2 A = \sec^2 A$?

हल समकोण $\triangle ABC$ में पाइथगोरस प्रमेय से



$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

दोनो पक्षो में आधार^2 का भाग देने पर -

$$\frac{\text{कर्ण}^2}{\text{आधार}^2} = \frac{\text{लम्ब}^2}{\text{आधार}^2} + \frac{\text{आधार}^2}{\text{आधार}^2}$$

$$\left(\frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}\right)^2 = \left(\frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}\right)^2 + 1$$

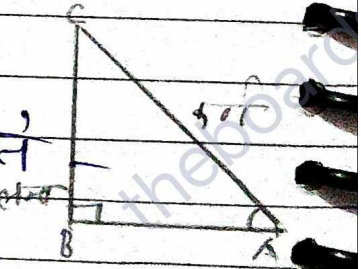
$$(\sec A)^2 = (\tan A)^2 + 1$$

$$\sec^2 A = \tan^2 A + 1$$

$$\boxed{1 + \tan^2 A = \sec^2 A}$$

Q-6 सिद्ध करो कि $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

हल समकोण $\triangle ABC$ में पाइथगोरस प्रमेय से



$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

दोनो पक्षो में लम्ब^2 का भाग देने पर

$$\frac{\text{कर्ण}^2}{\text{लम्ब}^2} = \frac{\text{लम्ब}^2}{\text{लम्ब}^2} + \frac{\text{आधार}^2}{\text{लम्ब}^2}$$

$$\left(\frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}\right) 1 + \left(\frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}\right)^2$$

$$(\operatorname{cosec} A)^2 = 1 + (\cot A)^2$$

$$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$$

$$\boxed{1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A}$$

उदा-10 सिद्ध कीजिए कि $\sec A(1-\sin A)(\sec A+\tan A)=1$?

L HS

हल $\sec A(1-\sin A)\cdot(\sec A+\tan A)=1$

$\sec A(1-\sin A)(\sec A+\tan A)$

$=\frac{1}{\cos A}(1-\sin A)\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)$

$=\frac{1}{\cos A}(1-\sin A)\cdot\frac{(1+\sin A)}{\cos A}$

$=\frac{(1-\sin A)\cdot(1+\sin A)}{\cos^2 A}$

$=\frac{(1)^2-(\sin A)^2}{\cos^2 A}$

$=\frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}$ $\quad 1-\sin^2 A=\cos^2 A$

$\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}$ [1 RHS]

उदा 09 अनुपातों के पदों $\cos A$, $\tan A$ में और $\sec A$ को ज्ञात कीजिए $\sin A$!

हल $\because \cos A=\sqrt{1-\sin A}$

$\because \tan=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$

$\therefore$ $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$ Ans

उदा: 11 सिद्ध कीजिए की $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

~~Sol~~ $\frac{\cot A - \cos A}{\cot + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

L.H.S. -

$\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A}$

$= \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\cos A + \cos A}$
$\sin A$

$\therefore \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

$\Rightarrow \frac{\cos A \left[\frac{1}{\sin A} - 1\right]}{}$

$\cos A \left[\frac{1}{\sin A} + 1\right]$ $\because \frac{1}{\operatorname{cosec} A} = \sin A$

$= \left[\frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}\right]$ R.H.S Ans

Q-1 त्रिकोणमितीय अनुपातो के $\cot A$ के पदो में $\sin A$ $\sec A$ और $\tan A$ ज्ञात कीजिए ?

हल $\sin A$, $\sec A$, $\tan A$

$$\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$$

$\therefore 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

$$= \operatorname{cosec} A = \sqrt{1 - \cot^2 A}$$

$$= \boxed{\sin A = \frac{1}{\sqrt{1 - \cot^2 A}}}$$

$$= \sec A = \sqrt{1 + \frac{1}{\cot^2 A}}$$

$$\Rightarrow \sec A = \sqrt{1 + \tan^2 A}$$

$$\boxed{\tan A = \frac{1}{\cot A}}$$

Q-3 सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प के पुष्टि कीजिए ?

(i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$ बराबर है :-

(A) 1 (B) 9 ✓ (C) 8 (D) 0

Rajshree

DATE: PAGE NO.:

Sol $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$

$9(\sec^2 A - \tan^2 A)$ $\because 1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

$1 = \sec^2 A - \tan^2 A$

$= 9 \times 1$

$= 9$ Ans.

(ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$ का मान है :-

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) -1

Sol 2

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$ बराबर है :-

(a) $\sec A$ (b) $\sin A$ (c) $\operatorname{cosec} A$ (d) $\cos A$

Sol $(\sec A + \tan)(1 - \sin A)$

$= \left[\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right] \cdot (1 - \sin A)$

$= \frac{(1 + \sin A)}{\cos A} (1 - \sin A)$

$= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos A}$ $\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A$

$\frac{\cos^2 A}{\cos A}$

$\cos A$

(iv) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$ बराबर है :-

(a) $\sec^2 A$ (b) -1 (c) $\cot^2 A$ (d) $\tan^2 A$

हल $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$

$= \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A}$

$= \frac{1}{\cos^2 A}$

$\frac{1}{\cot^2 A}$

$= \frac{1}{\cos^2 A \times \frac{\sin^2 A}{1}}$

$= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$= \boxed{\tan^2 A}$ Ans.

Q4 निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यून कोण है।

(i) $(\operatorname{cosec}\theta - \cot A)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

Ex L.H.S.

$$\text{Cosec}\,\theta - \text{Cot}\,\theta)^2$$

$$= \left[\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]^2$$

$$\left[\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right]^2$$

$\because \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$$\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} \qquad \because a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$ R.H.S Ans.

[ii] $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

Rajshree
DATE: _____ PAGE NO.: _____

L.H.S. -

$$\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos A \cdot \cos A + (1+\sin A)\cdot(1+\sin A)}{(1+\sin A)\cdot \cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A + 1 + \sin A + \sin + \sin A}{(1+\sin A)\cdot \cos A}$$

$$\frac{\cos^2 A + 1 + \sin A + 2\sin A}{(1+\sin^2 A)\cdot \cos A}$$

$\therefore \cos^2 A + \sin A = 1$

$$\frac{1+1+2\sin A}{(1+\sin A)\cdot \cos A}$$

$$= \frac{2+2\sin A}{(1+\sin A)\cdot \cos A}$$

$$= \frac{2(1+\sin A)}{(1+\sin A)\cdot \cos A}$$

$$\frac{2 \cdot 1}{\cos A}$$

$$= 2 \cdot \sec A$$

$2 \sec A$ R.H.S.

L.H.S. = R.H.S.

Rajshree
DATE: PAGE NO:

(iii) $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

~~Sol~~ R.H.S -

$\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

$\because \sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$= \frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}$

$\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$= \frac{(1-\cos A)(1+\cos A)}{1-\cos A}$

$= 1 + \cos A$

$1 + \frac{1}{\sec A}$

$= \frac{\sec A + 1}{\sec A}$

$= \frac{1+\sec A}{\sec A}$

L.H.S.

R.H.S. = L.H.S

(iv) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

हल L.H.S - $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}$

हर का परिमेयकरण करने पर

$\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A} \times \frac{1+\sin A}{1+\sin A}}$

$\sqrt{\frac{(1+\sin A)(1+\sin A)}{(1-\sin A)(1+\sin A)}}$ $\because a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$\sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{(1)^2 - \sin^2 A}}$

$\sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$ $\because \cos^2 A = 1-\sin^2 A$

$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}}$

$\sqrt{\left(\frac{1+\sin A}{\cos A}\right)^2}$

$= \frac{1+\sin A}{\cos A}$ $\because \sec A = \frac{1}{\cos A}$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$ $\quad \because \tan = \frac{\sin A}{\cos A}$

$= \boxed{\sec A + \tan A}$ R.H.S

$\boxed{L.H.S = R.H.S}$ Ans.

(v) $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

Sol $L.H.S = \frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{1 - 2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta - 1}$ $\quad \because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \tan\theta = \frac{1 - 2(1 - \cos^2\theta)}{2\cos^2\theta - 1}$ $\quad \because \sin\theta = 1 - \cos^2\theta$

$= \tan\theta = \frac{1 - 2 + 2\cos^2\theta}{2\cos^2\theta - 1}$

$= \tan\theta = \frac{-1 + 2\cos^2\theta}{2\cos^2\theta - 1}$

$$\tan\theta = \frac{2\cos^2\theta \cdot 1}{2\cos^2\theta - 1}$$

$\tan\theta$ RHS.

L.H.S. = R.H.S. Proved

(vi) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

L.H.S

$$(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$$

$\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$$= \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2\sin A \cdot \operatorname{cosec} A + \cos^2 A + \sec^2 A + 2\cos A \cdot \sec A$$

$$= \left(\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2 \cdot \sin A \cdot \frac{1}{\sin A}\right) + \cos^2 A + \sec^2 A + 2 \cdot \frac{\cos A}{\cos A}$$

$$= \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2 + \cos^2 A + \sec^2 A + 2$$

$$= 4 + \sin^2 A \operatorname{cosec}^2 A + \cos^2 A + \sec^2 A$$

$$= 4 + \sin^2 A + \cos^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$$

$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$$= 4 + 1 + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$$

$$= 5 + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$$

$\because 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

$= 5 + 1 + \cot^2 A + \sec^2 A$

$\because 1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

$= 5 + 1 + \cot^2 A + 1 + \tan^2 A$

$= 7 + \cot^2 A + \tan^2 A$

$= \boxed{7 + \tan^2 A + \cot^2 A}$ R.H.S

$\boxed{\text{L.H.S.} = \text{R.H.S}}$ Proved

theboardstudy.com