Que. यदि वायु में ध्वनि का वेग v, वायु के घनत्व d एवं दाब P पर निर्भर करता है तो वेग का व्यंजक ज्ञात कीजिये [MP 2023]

Solve :-

ध्वनि का वेग → v

वायु का घनत्व → d

दाब → P

$$v \propto P^{x} d^{y} \quad \text{--- (1)}$$

विमीय सूत्र की सहायता से :-

$$[LT^{-1}] \propto [ML^{-1}T^{-2}]^{x} [ML^{-3}]^{y}$$

$$[M^{0}LT^{-1}] \propto [M^{x}L^{-x}T^{-2x}][M^{y}L^{-3y}]$$

$$[M^{0}LT^{-1}] \propto [M^{x+y}L^{-x-3y}T^{-2x}]$$

घातों की तुलना करने पर :-

$x+y=0$ | $-x-3y=1$ | $-2x=-1$

$x=-y$ | $x=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}=-y$

$y=-\frac{1}{2}$

समी (1) में x एवं y के मान रखने पर :-

$$v \propto P^{1/2} \cdot d^{-1/2}$$

$$v \propto \frac{P^{1/2}}{d^{1/2}}$$

$$v \propto \sqrt{\frac{P}{d}}$$

$$v = \sqrt{\frac{P}{d}}$$

Rough कार्य :-

$$P = \frac{F}{A} = \frac{MLT^{-2}}{L^{2}} = [ML^{-1}T^{-2}]$$

घनत्व

$$d = \frac{m}{V} = \frac{[M]}{[L^{3}]} = [ML^{-3}]$$

www.theboardstudy.com

⇓

PDF notes

समीकरण की सत्यता जाँच विमीय विश्लेषण द्वारा

• दिए गए समीकरण सही हैं या नहीं – जाँचिए।

1. $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

Solve :-

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$

L.H.S. लेने पर

= S → विस्थापन

= [L]

तथा ut की विमाए :-

u → वेग

t → समय

ut => $[LT^{-1}][T]$

=> [L]

तथा $\frac{1}{2}at^2$ की विमाए :-

a → त्वरण => $[LT^{-2}]$

t → समय => [T]

at^2 => $[LT^{-2}][T^2]$

=> [L]

प्रत्येक पद की विमाए समान है

अतः समीकरण सही है।

Wed Aug 20, 9:42 PM

Que. विमीय विधि से सूत्र $v = \sqrt{\frac{P}{d}}$ की सत्यता की जांच कीजिये | जहां P दाब , d घनत्व एवं V ध्वनि का वेग है | [MP 2025]

Solve :- $v = \sqrt{\frac{P}{d}}$

$v \Rightarrow$ वेग

v की विमा $\Rightarrow [LT^{-1}]$

तथा $P \rightarrow$ दाब $\rightarrow ML^{-1}T^{-2}$

$d \rightarrow$ घनत्व $\rightarrow ML^{-3}$

तथा समीकरण का दूसरा पद :-

$$\sqrt{\frac{P}{d}} = \sqrt{\frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3}}}$$

$$= \sqrt{L^{-1}L^{3}T^{-2}}$$

$$= \sqrt{L^{2}T^{-2}}$$

$$= [LT^{-1}]$$

अतः दोनो पदो की विमाए समान है

अतः समी. सही है |

Wed Aug 20, 9:42 PM

Imp

$T \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$ | $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

- **विमीय विश्लेषण की सीमाएँ (Limitations of Dimensional Analysis):**

1. यह विधि समानुपाती स्थिरांक (constant of proportionality) का मान नहीं निकाल सकती।
2. यदि समानुपाती स्थिरांक विमारहित (dimensionless) न हो तो यह विधि उपयोगी नहीं है।
3. यह विधि मिश्रित संबंधों (composite relations) को व्युत्पन्न करने में सक्षम नहीं है, जैसे

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$\log x$ | e^x

4. यह विधि उन व्यंजकों (expressions) पर लागू नहीं की जा सकती जिनमें घातांकी (exponential) या त्रिकोणमितीय (trigonometric) पद शामिल हों।

$\sin\theta$ | $\cos\theta$ | $\tan\theta$

सार्थक अंक (Significant figures)

•किसी भौतिक राशि के मापे गए मान में **सार्थक अंक** **(Significant Figures)** यह बताते हैं कि कितने अंकों पर हमें विश्वास है।

•माप में जितने अधिक **सार्थक अंक** होंगे, मापन की **सटीकता** **(accuracy)** उतनी ही अधिक होगी।

$l_1 = 23.5\ cm$

$l_2 = 23.54\ cm$

Wed Aug 20, 9:42 PM

Rules :-

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

1. • किसी संख्या में जितने भी **शून्य (0) के अलावा अंक** होते हैं, वे सभी **सार्थक** (significant) माने जाते हैं.

Example –

34.7

231.2

1123.24

34.7 => 3 सार्थक अंक

231.2 => 4 सार्थक अंक

1123.24 => 6

Wed Aug 20, 9:42 PM

(1-9)

- यदि कोई 0 दो non-zero अंकों के बीच आता है, तो वह भी **सार्थक अंक (significant figure)** माना जाता है।

2.01 => 3 सार्थक अंक

4.302 => 4 सार्थक अंक

1.001 =>

Wed Aug 20, 9:42 PM

3. • किसी संख्या में जो शून्य (0) सबसे आगे non-zero अंक से पहले आते हैं, वे केवल **place holder** माने जाते हैं, **significant figure** नहीं।.

Example –

0.024 => 2 सार्थक अंक

0.241 => 3 —"—

0.0001

Wed Aug 20, 9:42 PM

Wed Aug 20, 9:42 PM

4. • अगर किसी संख्या के अंत में शून्य (0) हों लेकिन **decimal point न हो**, तो वे केवल **place holder** होते हैं और significant figures में नहीं गिने जाते।

- 1500 ⇒ 2 अंक
- 200 ⇒ 1
- 240 ⇒ 2 सार्थक अंक

Wed Aug 20, 9:42 PM

5. • किसी संख्या को वैज्ञानिक संकेतन (scientific notation) में लिखते समय, जो **10 की घात (power of 10)** लिखी जाती है, वह **सार्थक अंकों (significant figures)** की गिनती में शामिल नहीं होती।

• $13000 = 1.3 \times 10^{3}$ (4) → ✗

जो संख्याएँ **गणना से प्राप्त होती हैं** (जैसे वस्तुओं की गिनती) या जो **सटीक गणितीय स्थिरांक (constants)** हैं, उनके significant figures **अनंत (infinite)** माने जाते हैं।

speed of light - प्रकाश की चाल = 3×10^{8} m/s → सार्थक अंक → ∞

refractive index of water - अपवर्तनांक $\mu_w = 1.33$, $\mu_g = 1.5$ → ∞ सार्थक अंक

$\pi = 3.14....$

Wed Aug 20, 9:42 PM

प्रश्न: निम्नलिखित संख्याओं में सार्थक अंकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

1. 300 ⇒ 1
2. 300.01 ⇒ 5
3. 300.00 ⇒ 5
4. 0.010 ⇒ 2
5. 2.4201 ⇒ 5
6. 4.2×10^{6} ⇒ 2
7. 0.004200 ⇒ 4
8. 2.10×10^{3} ⇒ 3

मेरे सारे सही थे।

Wed Aug 20, 9:42 PM

मात्रको को बदल पर सार्थक अंको की संख्या नहीं बदलती है।

- **Number of significant figures do not change on changing the units . (express in order of magnitude)**

Example -

$$1.5m = 150cm$$

2 → 2

$$4.2\frac{J}{g^0C} = 4200J/kg^0C$$

2 → 2

$$1000m = 1km$$

1 → 1

$$1.0km = 1.0 \times 10^3 m$$

2 → 2

Wed Aug 20, 9:42 PM

राउंड ऑफ (Rounding off) के नियम

यदि छोड़ा जाने वाला अंक 5 से कम हो (0,1,2,3,4)
→ तो पिछले अंक को **जैसा है वैसा** रहने दें।
उदाहरण: 4.32

यदि छोड़ा जाने वाला अंक 5 से बड़ा हो (6,7,8,9)
→ तो पिछले अंक में **+1 जोड़ दें**।
उदाहरण: 7.68

यदि छोड़ा जाने वाला अंक ठीक 5 हो और उसके बाद कुछ भी नहीं हो
→ तो पिछले अंक **सम (even)** है तो **वैसा ही रखें**, और **विषम (odd)** है तो उसमें +1 जोड़ दें।
उदाहरण:
12.5 →
13.5 →

यदि छोड़ा जाने वाला अंक 5 हो और उसके बाद non-zero digits हों
→ तो पिछले अंक में हमेशा **+1 जोड़ दें**।
उदाहरण: 12.51

Wed Aug 20, 9:42 PM

दो सार्थक अंकों तक राउंड ऑफ कीजिए।

2.82 ⟹ 2.8 ✓

i. 2.87 ⟹ 2.9

ii. 2.852 ⟹ 2.9

iii. 2.854 ⟹ 2.9

iv. 2.850 ⟹ 2.8 ✓

v. 2.750 ⟹ 2.8 ✓

vi. 4.351 ⟹ 4.4

vii. 4.350 ⟹ 4.4

viii. 4.450 ⟹ 4.4

Wed Aug 20, 9:42 PM

Wed Aug 20, 9:42 PM

Addition & Subtraction में Significant Figures (सार्थक अंक) का नियम

- **नियम** (Rule):
- जब हम **जोड़** (Addition) या **घटाव** (Subtraction) करते हैं, तो परिणाम को उतने ही **दशमलव स्थान** (decimal places) तक लिखना चाहिए, जितने सबसे कम दशमलव स्थान उस संख्या में हों।

→ Ans

Example –

a) 33.3 + 3.11 + 0.313

$$\begin{array}{r} 33.3 \\ 3.11 \\ 0.313 \\ \hline 36.723 \end{array}$$

$= 36.723$

$\simeq 36.7$ Ans

Wed Aug 20, 9:42 PM

- B) 3.1421 + 0.241 + 0.09

Ans @o ?

≈ 3.47

$$\begin{array}{r} 3.1421 \\ 0.241 \\ 0.09 \\ \hline 3.4731 \end{array}$$

Wed Aug 20, 9:42 PM

Multiplication और Division में Significant Figures का नियम

- **नियम (Rule):**
- जब हम गुणा (Multiplication) या भाग (Division) करते हैं, तो परिणाम में उतने ही **सार्थक अंक (Significant Figures)** होने चाहिए जितने सबसे कम significant figures वाली संख्या में हैं।

a) $142.06 \times 0.23 =$ 32.6738 ≈ 33 Ans

14206 × 23
42618
28412×
326738

b) $\frac{0.90}{4.26} =$

c) 2.5×1.25=?

2.5×1.25

Wed Aug 20, 9:42 PM

त्रुटि (Error) क्या है?

किसी भौतिक मात्रा का मापा गया मान (measured value) और उसका वास्तविक मान (true value) समान नहीं होते।
उनके बीच का अंतर त्रुटि (Error) कहलाता है।

- त्रुटियों के प्रकार (Types of Errors):
- सिस्टमैटिक त्रुटियाँ (Systematic Errors):
  - जो बार-बार एक ही प्रकार से होती हैं।
  - कारण: यंत्र की खराबी, प्रयोगकर्ता की गलती, या विधि में दोष।
  - इन्हें सुधारना संभव है।
- रैंडम त्रुटियाँ (Random Errors):
  - जो बिना किसी नियम के, अचानक होती हैं।
  - जैसे: प्रयोग बार-बार करने पर थोड़े-थोड़े अलग परिणाम आना।
- सर्वोच्च त्रुटि / व्यक्तिगत त्रुटि (Gross / Personal Errors):
  - प्रयोगकर्ता की लापरवाही से हुई त्रुटि (जैसे पैमाना गलत पढ़ लेना)।

चाय पत्ती => 250 gram => वास्तविक मान
=> 245 gram => मापा गया मान
5 gram -> त्रुटि (error) गलती

Wed Aug 20, 9:42 PM

Absolute Error (सर्वोच्च त्रुटि) (निरपेक्ष त्रुटि)

- Mean Absolute Error (औसत त्रुटि)
- Relative Error (सापेक्ष त्रुटि)
- Percentage Error (प्रतिशत त्रुटि)

Wed Aug 20, 9:42 PM

Q. किसी प्रयोग में बार-बार मापने पर प्राप्त मान हैं – 4.2, 4.4, 4.5, 4.3, 4.6
गणना कीजिए –
a) औसत मान (Mean Value)
b) सर्वोच्च त्रुटियाँ (Absolute Errors) (निरपेक्ष)
c) औसत त्रुटि (Mean Absolute Error)
d) सापेक्ष त्रुटि (Fractional Error)
e) प्रतिशत त्रुटि (Percentage Error)

(a) औसत मान $= \frac{4.2+4.4+4.5+4.3+4.6}{5}$

$= \frac{22.0}{5} = 4.4$ => वास्तविक मान

(b) निरपेक्ष त्रुटि :–

$\Delta a_1 = |4.4-4.2| = 0.2$

$\Delta a_2 = |4.4-4.4| = 0$

$\Delta a_3 = |4.4-4.5| = 0.1$

$\Delta a_4 = |4.4-4.3| = 0.1$

$\Delta a_5 = |4.4-4.6| = 0.2$

Wed Aug 20, 9:42 PM

(c) औसत त्रुटि :-

$$= \frac{0.2 + 0 + 0.1 + 0.1 + 0.2}{5}$$

$$= \frac{0.6}{5}$$

$$= 0.12$$

त्रुटि को लिखने का तरीका :-

$$= (4.4 \pm 0.12)$$

(d) सापेक्षिक त्रुटि

$$= \frac{\text{औसत त्रुटि}}{\text{वास्तविक मान}}$$

$$= \frac{0.12}{4.4}$$

(e) प्रतिशत त्रुटि :-

= सापेक्षिक त्रुटि ×100

$$= \frac{0.12}{4.4} \times 100 = \frac{120}{44}$$

$$= \frac{30}{11} = 2.7\%$$

Wed Aug 20, 9:42 PM

त्रुटियों का प्रसार (Propagation of Errors)

जब किसी भौतिक राशि (Physical Quantity) की गणना **दो या अधिक मापी गई राशियों** से की जाती है, तो उनकी त्रुटियाँ (Errors) भी उस परिणाम में आ जाती हैं। इन त्रुटियों के फैलने की प्रक्रिया को **त्रुटियों का प्रसार** (Propagation of Errors) कहते हैं।

- **जोड़ एवं घटाव में त्रुटियों का प्रसार (Propagation of Errors in Addition & Subtraction)**
- **उदाहरण :**
  किसी आयत की लंबाई = $1 \pm 0.1\, m$ चौड़ाई = $2 \pm 0.2\, m$ परिमाप ज्ञात कीजिए।

$l = (1 \pm 0.1)m$

$b = (2 \pm 0.2)m$

आयत का परिमाप $= 2(l+b)$

$= 2(1+2)$

$= 2 \times 3$

$= 6$

त्रुटि $= 0.1 + 0.2$

$= 0.3$

अतः परिमाप :-

$= (6 \pm 0.3)m$

Wed Aug 20, 9:42 PM

Q. किसी प्रेक्षक दवारा जल का प्रारंभिक एवं अंतिम तापमान क्रमशः $(40.6 \pm 0.2)°C$ और $(78.3 \pm 0.3)°C$ मापा गया। सही सीमाओं (proper limits) के साथ तापमान में वृद्धि की गणना कीजिए।

Solve:

$T_1 = (40.6 \pm 0.2)°C$

$T_2 = (78.3 \pm 0.3)°C$

$\Delta T = T_2 - T_1$

$= 78.3 - 40.6$

$= 37.7°C$

त्रुटि $= 0.2 + 0.3$

$= 0.5$

तब तापमान में वृद्धि :-

$(37.7 \pm 0.5)°C$

Wed Aug 20, 9:42 PM

- **प्रश्न :**

2) गुणा और भाग (Multiplication and Division)

- उदाहरण – किसी आयताकार मैदान की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः (4±0.4) m तथा (2±0.2) m मापी गई हैं। सही त्रुटि सीमा (proper error limit) सहित मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

गई है।

Solve:

$l = (4 \pm 0.4)\,m$

$b = (2 \pm 0.2)\,m$

क्षेत्रफल(A) $= l \times b$

$= 4 \times 2$

$= 8$

त्रुटि :-

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$\frac{\Delta A}{8} = \frac{0.4}{4} + \frac{0.2}{2}$$

$$\frac{\Delta A}{8} = \frac{0.8 + 0.8}{8}$$

$$\Delta A = 1.6$$

अत: क्षेत्रफल

$= (8 \pm 1.6)\,m^2$

Wed Aug 20, 9:42 PM

PDF
Notes
⇓
Theboardstudy.com

Wed Aug 20, 9:42 PM