गुरुत्वाकर्षण (Gravitation)

केप्लर के ग्रह की गति से सम्बन्धित नियम:

कक्षाओं का नियम

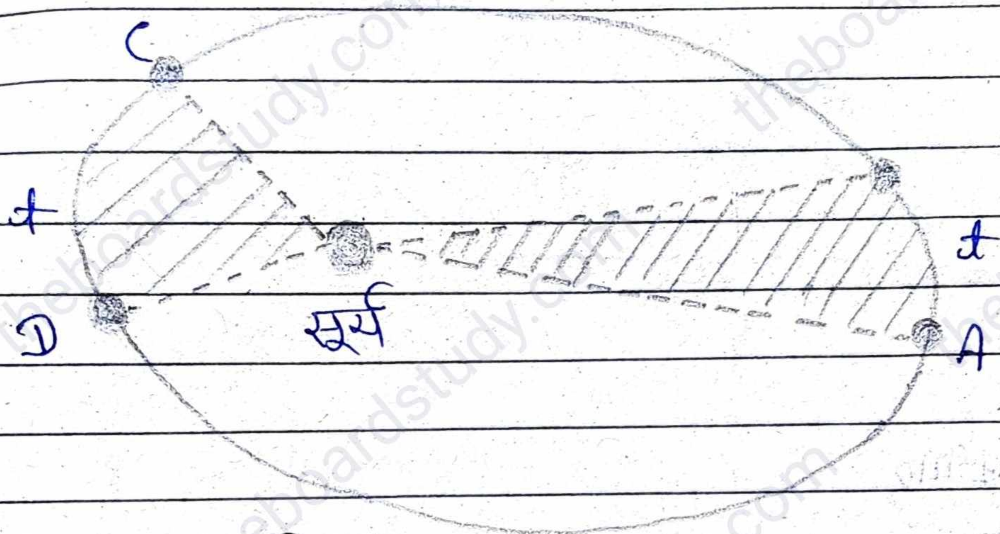
(i) केप्लर का प्रथम नियम →

इस नियम अनुसार प्रत्येक ग्रह सूर्य के चारों ओर दीर्घ वृत्ताकार कक्षा में चक्कर लगाता है। जिसके एक फोकस पर सूर्य स्थित होता होता है।

(ii) द्वितीय (क्षेत्रफलों का नियम)
केप्लर का द्वितीय नियम →

सूर्य और ग्रह को मिलाने वाली रेखा बराबर समय में बराबर क्षेत्रफल तय करती है। अर्थात जब ग्रह सूर्य के समीप होता है तो उसकी चाल अधिक होती है। तथा जब ग्रह सूर्य से दूर होता है तो उसकी चाल कम होती है।

Date: ______ Page no: ______



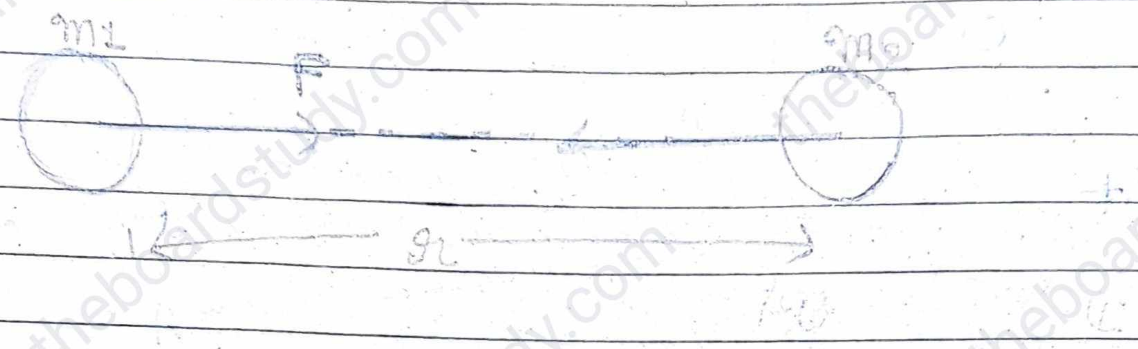
(iii) केप्लर का तृतीय नियम :-
आवर्त काल का नियम — इस नियमानुसार किसी भी ग्रह का परिक्रमण काल का वर्ग दीर्घ वृत्तीय कक्षा के अर्ध दीर्घ अक्ष के घन के अनुक्रमानुपाती होता है।
यदि किसी ग्रह का सूर्य के परितः परिक्रमण काल "T" हो तो तथा उसकी कक्षा की अर्धदीर्घ अक्ष "a" हो तो

$$T^2 \propto a^3$$

या $T^2 = Ka^3$ जहाँ K एक नियतांक है।

न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम :

इस नियमानुसार किन्हीं दो पिण्डों के मध्य लगने वाला आकर्षण बल उन दोनों पिण्डों के द्रव्यमानों के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती तथा उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है।



$F \propto m_1 m_2$

$F \propto \frac{1}{r^2}$

दोनों समीकरणों को मिलाकर लिखने पर :

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

जहाँ G एक नियतांक है।

G → सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक

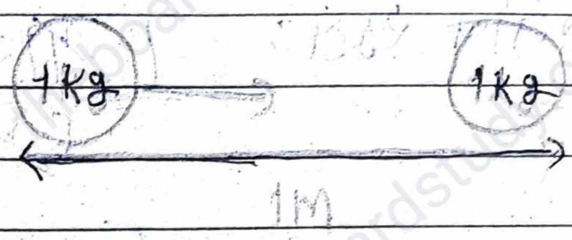
$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{N \times m^2}{Kg^2}$$

गुरुत्वाकर्षण नियतांक →

न्यूटन के नियम से

theboardstudy.com

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$



यदि: $m_1 = m_2 = 1 kg$

$r = 1m$

$$F = \frac{G \times 1 \times 1}{1^2}$$

$F = G$

अर्थात गुरुत्वाकर्षण नियतांक 1m की दूरी पर स्थित दो (1kg के द्रव्यमानों के बीच लगने वाले आकर्षण बल के बराबर होता है।

G का मात्रक:

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = \frac{F \times r^2}{m_1 m_2}$$

$$G \text{ का मात्रक} = \frac{Newton \times metre^2}{kg \times kg}$$

$$= \frac{Newton \times metre^2}{kg^2}$$

theboardstudy.com

Date: ______ Page no: ______

विमीय सूत्र : $\frac{[MLT^{-2}][L^2]}{[M][M]}$

$= [M^{-1}L^3T^{-2}]$

यह एक अदिश राशि है।

$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

गुरुत्वीय त्वरण →

विराम अवस्था से स्वतंत्रता पूर्वक नीचे गिरती हुई वस्तु के वेग में पृथ्वी के आकर्षण बल के कारण प्रति सेकण्ड जितनी वृद्धि होती है उसे गुरुत्वीय त्वरण कहते हैं। ~~एवं पृथ्वी~~ इसे g से प्रदर्शित करते हैं। एवं पृथ्वी पर इसका मान $g = 9.8\ m/s^2$ होता है।

$g = 9.8\ m/s^2$

मात्रक $\frac{m}{s^2}$

विमीय सूत्र : $[M^0LT^{-2}]$

theboardstudy.com

Date: ______ Page no: ______

Q. गुरुत्वाकर्षण नियतांक तथा गुरुत्वीय त्वरण में अंतर

गुरुत्वाकर्षण नियतांक	गुरुत्वीय त्वरण
(i) एकांक दूरी पर रखे दो एकांक द्रव्यमान के पिंडों के बीच लगने वाले आकर्षण बल के संख्यात्मक मान को G कहते हैं।	स्वतंत्रतापूर्वक नीचे गिरते पिंड में पृथ्वी के आकर्षण बल के कारण उत्पन्न त्वरण को g कहते हैं।
(ii) G का मात्रक न्यूटन × मीटर² / किग्रा² है।	g का मात्रक मीटर / सेकण्ड² है
(iii) G का मान सभी स्थानों पर समान रहता है।	g का मान भिन्न - भिन्न स्थानों पर भिन्न - भिन्न होता है।
(iv) G एक सार्वत्रिक नियतांक है जिसका मान 6.67×10^{-11} न्यूटन मीटर² किग्रा² है।	g का औसत मान 9.8 मी / से² माना जाता है।
(v) G एक अदिश राशि है।	g एक सदिश राशि है।

Q. G व g में संबंध लिखिए ?

माना कि पृथ्वी का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है तब पृथ्वी की सतह पर रखे m द्रव्यमान पर लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल:

Date: ______ Page no: ______

$$F = \frac{GMm}{R^2} \quad \text{—— (1)}$$

परन्तु वस्तु भार:

$$F = mg \quad \text{— (2)}$$

समी (1) व (2) की तुलना करने पर

$$mg = \frac{GMm}{R^2}$$

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

यही आवश्यक सम्बन्ध है।

g के मान में परिवर्तन -

(i) ऊँचाई के साथ g के मान में परिवर्तन
(ii) गहराई के साथ g के मान में परिवर्तन

(i) ऊँचाई के साथ g के मान में परिवर्तन →

माना कि एक बिन्दु पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर स्थित है जहाँ गुरुत्वीय त्वरण का मान g' है तब

Date: ______ Page no: ______

$$g' = \frac{GM}{(R+h)^2} \quad \text{--- (i)}$$

परन्तु पृथ्वी के तल पर गुरुत्वीय त्वरण का मान:

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \text{--- (ii)}$$

समी (i) में समी (ii) का भाग देने पर

$$\frac{g'}{g} = \frac{\frac{GM}{(R+h)^2}}{\frac{GM}{R^2}}$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{R^2}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

$$g' = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

theboardstudy.com

Date: Page no:

स्पष्ट है कि

$$g' \propto \frac{1}{h}$$

अतः ऊँचाई के साथ g के मान में कमी होती है।

(ii) गहराई के साथ g के मान में परिवर्तन →

माना की त्रिज्या R एवं द्रव्यमान M है तब पृथ्वी के तल पर गुरुत्वीय त्वरण:

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

∴ घनत्व = $\frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}}$

द्रव्यमान = आयतन × घनत्व

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 d$$

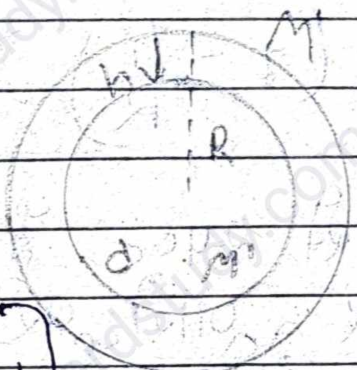
तब

$$g = \frac{G\frac{4}{3}\pi R^3 d}{R^2}$$

$$g = G\frac{4}{3}\pi R d \quad \text{---} (1)$$

Date: ______ Page no: ______

माना h गहराई में जाने पर पृथ्वी का द्रव्यमान M' रह जाता है एवं इस स्थान पर गुरुत्वीय त्वरण g' है।



$$g' = \frac{GM'}{(R-h)^2}$$

$$\left[\because \quad M' = \frac{4}{3}\pi (R-h)^3 d\right]$$

तब

$$g' = \frac{G\frac{4}{3}\pi (R-h)^3 d}{(R-h)^2}$$

$$g' = G\frac{4}{3}\pi (R-h)d \quad -②$$

समी ① में समी ② से भाग देने पर :

$$\frac{g'}{g} = \frac{G\frac{4}{3}\pi (R-h) d}{G\frac{4}{3}\pi R d}$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{R-h}{R}$$

$$g' = g\left(1 - \frac{h}{R}\right) \quad \text{--- (3)}$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{R}{R} - \frac{h}{R}$$

$$\frac{g'}{g} = 1 - \frac{h}{R}$$

$$g' = g\left(1 - \frac{h}{R}\right) \quad \text{--- (3)}$$

पृथ्वी केंद्र पर
$h = R$
समी (3) से

$$g' = g\left(1 - \frac{R}{R}\right)$$

$$g' = g(1 - 1)$$

$$g' = g \times 0$$

$$\boxed{g' = 0}$$

अतः समी (3) से स्पष्ट है कि पृथ्वी में गहराई पर जाने पर g के मान में कमी होती है।

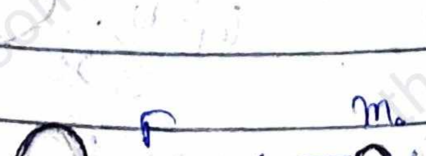
गुरुत्वीय क्षेत्र :-

किसी पिण्ड का चारों ओर वह क्षेत्र जहाँ कोई अन्य पिण्ड गुरुत्वाकर्षण बल का अनुभव करता है गुरुत्वीय क्षेत्र कहलाता है।

गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता →

गुरुत्वीय क्षेत्र के किसी बिन्दु पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता उस बिन्दु पर रखे एकांक द्रव्यमान के पिण्ड पर लगने वाले बल के बराबर होती है। इसे कैपिटल "I" से प्रदर्शित करते हैं।

$$I = \frac{F}{m_0}$$



मात्रक : $\frac{\text{न्यूटन}}{\text{द्रव्यमान}}$ $\frac{N}{Kg}$

theboardstudy.com

Date: ______ Page no: ______

विमीय सूत्र : $\frac{[MLT^{-2}]}{[M]} = [M^0LT^{-2}]$

यह एक सदिश राशि है इसकी दिशा बल की दिशा में होती है।

परन्तु गुरुत्वाकर्षण नियम से :

$$F = \frac{GMm_0}{r^2}$$

समी (1) में मान रखने पर

$$I = \frac{\left(\frac{GMm_0}{r^2}\right)}{m_0}$$

$$\boxed{I = \frac{GM}{r^2}}$$

गुरुत्वीय ~~स्थिर~~ स्थितिज ऊर्जा → किसी पिण्ड को अनन्त से गुरुत्वीय क्षेत्र के अन्दर किसी बिन्दु तक लाने में जितना कार्य होता है उसे उस बिन्दु पर पिण्ड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहते है।

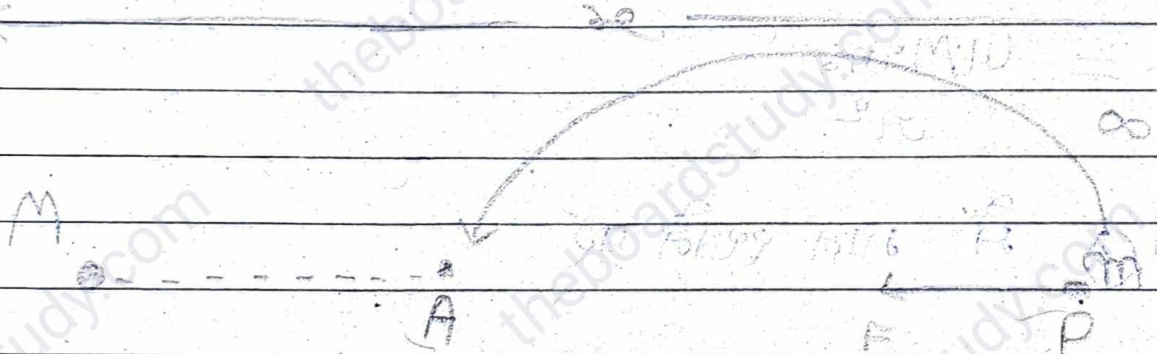
$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

मात्रक : जूल (J)

विमीय सूत्र : $[ML^2T^{-2}]$

यह एक अदिश राशि है।

गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का व्यंजक :



माना कि द्रव्यमान M के गुरुत्वीय क्षेत्र में एक बिन्दु A स्थित है जहां हमें गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का मान ज्ञात करना है। तब अनन्त से m द्रव्यमान को लाने में किया गया कार्य

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx \quad \text{—— (1)}$$

परन्तु दोनों द्रव्यमानों के मध्य गुरुत्वाकर्षण बल :

$$F = \frac{GMm}{x^2}$$

Date: ______ Page no: ______

समी (1) में F का मान रखने पर

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \frac{GMm}{x^2} dx$$

$$W = \int_{\infty}^{r} \frac{GMm}{x^2} dx$$

$$W = GMm \int_{\infty}^{r} \frac{1}{x^2} dx$$

$$W = GMm \int_{\infty}^{r} x^{-2} dx$$

$$W = GMm \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_{\infty}^{r}$$

$$W = GMm \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_{\infty}^{r}$$

$$W = -GMm \left(\frac{1}{x} \right)_{\infty}^{r}$$

Date: Page no:

$$W = -GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right)$$

$$W = -GMm \times \frac{1}{r}$$

$$W = \frac{-GMm}{r}$$

यही कार्य वस्तु में गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा के रूप में ~~संचि~~ संचित हो जाता है।

$$U = \frac{-GMm}{r}$$

यही अभीष्ट व्यंजक है।

गुरुत्वीय विभव →

गुरुत्वीय क्षेत्र के ~~अन्दर~~ किसी बिन्दु पर विभव एकांक द्रव्यमान के पिण्ड को अनन्त से गुरुत्वीय क्षेत्र के अन्दर तक लाने में किये कार्य के बराबर होता है। गुरुत्वीय विभव सदैव ऋणात्मक होता है। एवं इसे कैपिटल "V" से प्रदर्शित करते हैं।

$$V = -\frac{W}{m}$$

मात्रक ÷ जूल / Kg ~~द्रव्यमान~~

विमीय सूत्र ÷

[M°L

यह एक अदि

Imp

पलायन वे

पलायन वेग
पिण्ड को पृथ्वी
पृथ्वी के गुरुत्
अर्थात्
वापस न
प्रदर्शित कहते

ve =

पलायन वेग के

Date: ______ Page no: ______

$V = \frac{W}{m}$

मात्रक :- $\frac{\text{जूल}}{Kg}$ ~~द्रव्यमान~~ $\frac{J}{Kg}$

विमीय सूत्र :- $\frac{[ML^2T^{-2}]}{[M]}$

$[M^0L^2T^{-2}]$

यह एक अदिश राशि है।

पलायन वेग (Escape Velocity) :-

V.Imp

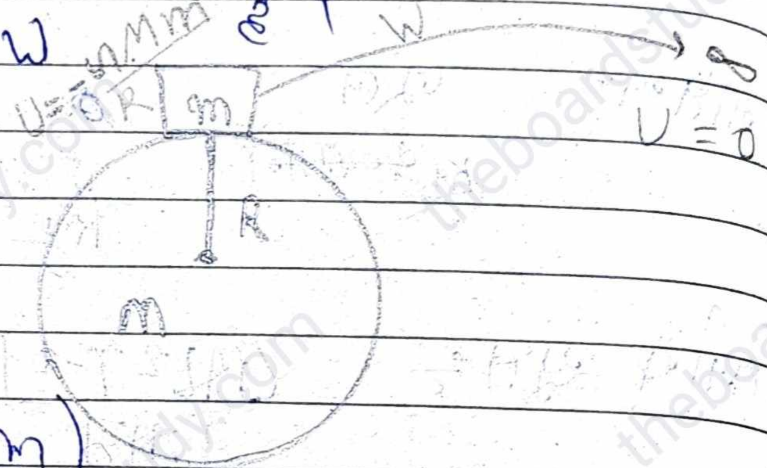
पलायन वेग वह न्यूनतम वेग है जिससे किसी पिण्ड को पृथ्वी तल से ऊपर फेकने पर वह पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र से बाहर निकल जाए अर्थात् वह पृथ्वी तल पर लौटकर कभी वापस न आ सके। इसे "ve" से प्रदर्शित करते है।

$$v_e = \sqrt{2gR}$$

पलायन वेग के लिए ~~व्यय~~ व्यंजक :

Date: ______ Page no: ______

माना कि किसी m द्रव्यमान के पिंड को ~~फेंक~~ पृथ्वी की सतह से अनन्त पर भेजने में किया गया कार्य W है।



$$W = \Delta U$$

$$W = U_f - U_i$$

$$W = 0 - \left(-\frac{GMm}{R}\right)$$

$$W = \frac{GMm}{R}$$

यही किया गया कार्य गतिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है।

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_e^2 = \frac{GM\cancel{m}}{R}$$

$$v_e^2 = \frac{2GM}{R}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad \leftarrow (1)$$

theboardstudy.com

Date: ______ Page no: ______

परन्तु :-

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$GM = gR^2$$

समी (1) में मान रखने पर :-

$$V_e = \sqrt{\frac{2gR^2}{R}}$$

$$V_e = \sqrt{2gR}$$

यही अविष्ट व्यंजक है।

Note :-

(i) पृथ्वी के लिए पलायन वेग का मान 11.2 Km/s होता है।

(ii) चंद्रमा के लिए पलायन वेग का मान ~~2.43 2.43 Km/s~~ 2.43 Km/s होता है।

भू - उपग्रह →

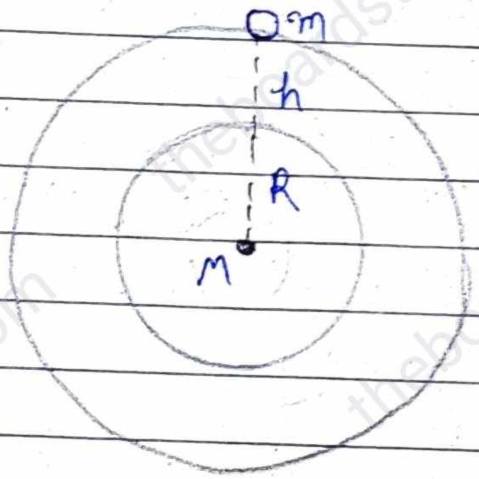
वह आकाशीय पिण्ड जो पृथ्वी अथवा किसी ग्रह के चारो ओर चक्कर लगाता है। उपग्रह कहलाता है। पृथ्वी का एक मात्र प्राकृतिक उपग्रह चंद्रमा है।

theboardstudy.com

कक्षीय चाल →

किसी कक्षा में किसी उपग्रह को स्थापित करने के लिये आवश्यक चाल को उस उपग्रह की कक्षीय चाल कहते है।

कक्षीय चाल का व्यंजक →



ग्रह के चारों ओर उपग्रह की वृत्तीय मार्ग में गति के लिए ~~आवश्य~~ आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल ग्रह एवं उपग्रह के मध्य लगने वाले आकर्षण बल द्वारा प्रदान किया जाता है।

अभिकेन्द्रीय बल = गुरुत्वाकर्षण बल

$$\frac{mv^2}{(R+h)} = \frac{GMm}{(R+h)^2}$$

$$v^2 = \frac{GM}{(R+h)} \quad (1)$$

theboardstudy.com

Date: ______ Page no: ______

परन्तु :- $GM = gR^2$

$$v^2 = \frac{gR^2}{R+h}$$

$$v = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} \quad \text{—— (2)}$$

यही आवश्यक व्यंजक है।

Note :-

(i) पृथ्वी के समीप परिक्रमा करने वाले ग्रह की कक्षीय चाल लगभग 7.9 km/s होती है।

~~परिक्रमण काल~~ →

यदि उपग्रह पृथ्वी के अत्यन्त पास हो $h = 0$
समी (1) से व समी (2) से

$$v^2 = \frac{GM}{(R+h)}$$

$$v^2 = \frac{GM}{R+0}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

theboardstudy.com

Date: ______ Page no: ______

समी (2) से

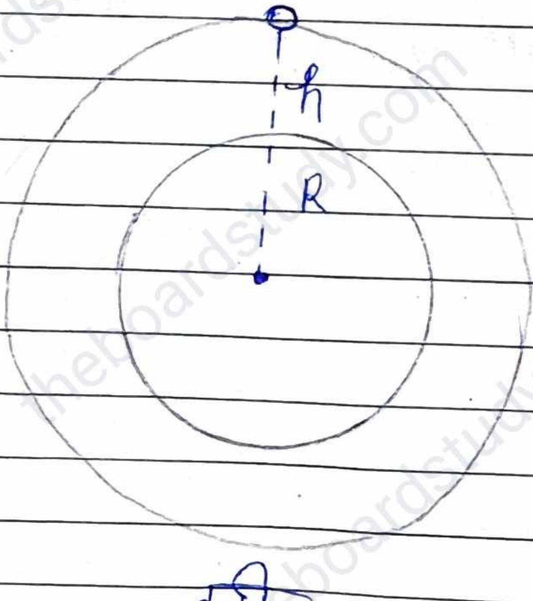
$$v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+0}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{R}}$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{gR}}$$

परिक्रमण काल → उपग्रह द्वारा पृथ्वी का पूर्ण चक्कर लगाने में लगा समय उपग्रह का परिक्रमण काल कहलाता है।

परिक्रमण काल का व्यंजक →



$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

theboardstudy.com

Date: ______ Page no: ______

$$T = \frac{2\pi r}{v_0}$$

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{\sqrt{\frac{gR^2}{(R+h)}}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^2(R+h)}{gR^2}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{gR^2}} \quad \text{——} \ (1)$$

परन्तु:

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$gR^2 = GM$$

समी (1) से

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}} \quad (2)$$

theboardstudy.com

Date: ______ Page no: ______

यदि कोई उपग्रह पृथ्वी के अत्यन्त नजदीक घूम रहा हो तो

$$h = 0$$

समी (2) से

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+0)^3}{GM}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}} \quad (3)$$

परन्तुः

$$\rho = \frac{M}{V}$$

$$M = V\rho$$

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

समी (3) से

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\times\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{G4\pi\rho}}}$$

Date: Page no:

Q. चंद्रमा पर वायुमण्डल नहीं है जबकि ब्रहस्पति और शनि पर सघन वायुमण्डल है। क्यों।

Ans चंद्रमा पर पलायन वेग लगभग 2.47 km/s होता है। इसलिए जिन गैसों के अणुओं की चाल 2.4 km अथवा इससे अधिक होती है वे चंद्रमा की सतह को छोड़कर सदैव के लिए अंतरिक्ष में चले जाते हैं। अतः चंद्रमा पर वायुमण्डल नहीं होता। इसके विपरित बड़े ग्रह जैसे ब्रहस्पति शनि आदि पर पलायन वेग का मान बहुत अधिक होता है। अतः वह से अणु पलायन नहीं कर पाते। तथा वह पृथ्वी की अपेक्षा सघन वायुमण्डल उपस्थित रहता है।

Q. g का मान कहाँ अधिक तथा कहाँ कम होता है?

Ans पृथ्वी पर g का मान ~~अधिकतम~~ न्यूनतम भूमध्य रेखा पर होता है। एवं प्रस्थ ~~न्यूनतम~~ अधिकतम ध्रुवों पर होता है।

तुल्यकाली उपग्रह :- पृथ्वी के ऐसे कृत्रिम उपग्रह जिनका आवर्त काल पृथ्वी के घूर्णन काल के बराबर होता है अर्थात 24 घण्टे होता है, को तुल्यकाली उपग्रह कहते हैं।