

Class 9th

गणित

अध्याय 1

संख्या पद्धति

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखित को दशमलव रूप में लिखें और बताएं कि प्रत्येक का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है: i) $36/100$ ii) $1/11$ iii) $4 \times 1/8$ iv) $3/13$ v) $2/11$ vi) $329/400$

समाधान:

i) $36/100$

$$36/100 = 0.36$$

इस प्रकार, दशमलव प्रारूप में $36/100$ को 0.36 के रूप में दर्शाया जाता है।

यह एक अंत दशमलव संख्या है .

ii) $1/11$

$$\begin{array}{r} 0.0909 \\ 11 \overline{) 1.00} \\ \underline{- 99} \\ 100 \\ \underline{- 99} \\ 1 \end{array}$$

शेषफल 1 बार-बार आता है। इसलिए, $1/11 = 0.0909...$ और इसे $1/11 = 0.09$ के रूप में लिखा जा सकता है

यह एक अनवसानी आवर्ती दशमलव है ।

iii) $4 \frac{1}{8}$

418 अनुचित अंश के रूप में $33/8$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$\begin{array}{r} 4.125 \\ 8 \overline{) 33.0} \\ \underline{- 32} \\ 10 \\ \underline{- 8} \\ 20 \\ \underline{- 16} \\ 40 \\ \underline{- 40} \\ 0 \end{array}$$

इस प्रकार, $418 = 33/8 = 4.125$

इस प्रकार, 418 दशमलव रूप में 4.125 लिखा जाता है।

यह एक सांत दशमलव संख्या है क्योंकि शेष शून्य है।

iv) $3/13$

$$\begin{array}{r}
 0.23076923... \\
 13 \overline{) 3.00000000} \\
 \underline{- 26} \\
 40 \\
 \underline{- 39} \\
 10 \\
 \underline{- 00} \\
 100 \\
 \underline{- 91} \\
 90 \\
 \underline{- 78} \\
 120 \\
 \underline{- 117} \\
 30 \\
 \underline{- 26} \\
 40 \\
 \underline{- 39} \\
 1
 \end{array}$$

इस प्रकार, $3/13 = 0.23076923...$

हम देखते हैं कि दशमलव बिंदु के बाद संख्याओं का समूह 230769 बार-बार दोहराया जाता है। अतः यह एक अनवसानी आवर्ती दशमलव है।

v) $2/11$

$$\begin{array}{r}
 0.1818 \\
 11 \overline{) 20} \\
 \underline{- 11} \\
 90 \\
 \underline{- 88} \\
 20 \\
 \underline{- 11} \\
 90 \\
 \underline{- 88} \\
 2
 \end{array}$$

इस प्रकार, $2/11 = 0.1818$

यहाँ, हम देखते हैं कि संख्याओं का समूह 18 बार-बार दोहराया जाता है। अतः, यह एक अनवसानी आवर्ती दशमलव है।

$$329/400 = 329 \div (4 \times 100) = 0.8225$$

$$\begin{array}{r}
 82.25 \\
 4 \overline{) 329} \\
 \underline{- 32} \\
 9 \\
 \underline{- 8} \\
 10 \\
 \underline{- 8} \\
 20 \\
 \underline{- 20} \\
 0
 \end{array}$$

अब, $82.25/100 = 0.8225$

इस प्रकार, दशमलव रूप में $329/400$ को 0.8225 लिखा जाता है।

यह एक सांत दशमलव संख्या है क्योंकि शेष शून्य है।

2. आप जानते हैं कि $1/7 = 0.142587$. क्या आप बिना दीर्घ विभाजन किए, $2/7$, $3/7$, $4/7$, $5/7$, $6/7$ के दशमलव प्रसारों का अनुमान लगा सकते हैं? यदि हाँ, तो कैसे?

[संकेत : $1/7$ का मान ज्ञात करते समय शेषफलों का ध्यानपूर्वक अध्ययन करें।]

समाधान:

हमारे पास दशमलव प्रसार $1/7 = 0$ है। 142587

आइये $2/7$, $3/7$, $4/7$, $5/7$, $6/7$ के दशमलव प्रसार ज्ञात करें।

इसे आगे बढ़ाने के लिए, आइए $1/7$ के दीर्घ विभाजन में शेषफल के पैटर्न और भागफल के अंकों को देखें, जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

$$\begin{array}{r}
 0.142857 \\
 7 \overline{) 10} \\
 \underline{- 7} \\
 30 \\
 \underline{- 28} \\
 20 \\
 \underline{- 14} \\
 60 \\
 \underline{- 56} \\
 40 \\
 \underline{- 35} \\
 50 \\
 \underline{- 49} \\
 1
 \end{array}$$

जैसा कि हम देख सकते हैं, $1/7$ एक अनवसानी आवर्ती दशमलव है। हम इसका उपयोग $2/7$, $3/7$, $4/7$, $5/7$, $6/7$ का दशमलव प्रसार ज्ञात करने के लिए कर सकते हैं।

दशमलव विस्तार लिखने के लिए:

i) $2/7$

$$2/7 = 2 \times (1/7)$$

$$= 2 \times 0.142857$$

$$= 0.285714$$

साथ ही, हम देखते हैं कि उपरोक्त विभाजन में दूसरे चरण के बाद हमें शेषफल 2 प्राप्त होता है।

इसलिए, हम भागफल को दूसरे दशमलव स्थान के बाद लिखना शुरू करते हैं और हमें $2/7 = 0.285714$ प्राप्त होता है।

$$\text{अतः, } 2/7 = 0.285714$$

ii) $3/7$

$$3/7 = 3 \times (1/7)$$

$$= 3 \times 0.142857$$

$$= 0.428571$$

साथ ही, हम देखते हैं कि उपरोक्त विभाजन में पहले चरण के बाद हमें शेषफल 3 प्राप्त होता है।

इसलिए, हम भागफल को पहले दशमलव स्थान के बाद लिखना शुरू करते हैं और हमें $3/7 = 0$ प्राप्त होता है। 428571

$$\text{अतः, } 3/7 = 0.428571$$

iii) $4/7$

$$4/7 = 4 \times (1/7)$$

$$= 4 \times 0.142857$$

$$= 0.571428$$

साथ ही, हम देखते हैं कि उपरोक्त विभाजन में चौथे चरण के बाद हमें शेषफल 4 प्राप्त होता है।

इसलिए, हम भागफल को चौथे दशमलव स्थान के बाद लिखना शुरू करते हैं और हमें $4/7 = 0$ प्राप्त होता है। 571428

$$\text{अतः, } 4/7 = 0.571428$$

iv) $5/7$

$$5/7 = 5 \times (1/7)$$

$$= 5 \times 0.142857$$

$$= 0.714285$$

साथ ही, हम देखते हैं कि उपरोक्त विभाजन में पांचवें चरण के बाद हमें शेषफल 5 प्राप्त होता है।

इसलिए, हम भागफल को पांचवें दशमलव स्थान के बाद लिखना शुरू करते हैं और हमें $5/7 = 0$ प्राप्त होता है। 714285

अतः, $5/7 = 0.714285$

v) $6/7$

$$6/7 = 6 \times (1/7)$$

$$= 6 \times 0.142857$$

$$= 0.857142$$

साथ ही, हम देखते हैं कि उपरोक्त विभाजन में तीसरे चरण के बाद हमें शेषफल के रूप में 6 प्राप्त होता है।

इसलिए, हम भागफल को तीसरे दशमलव स्थान के बाद लिखना शुरू करते हैं और हमें $6/7 = 0$ प्राप्त होता है। 857142

अतः, $6/7 = 0.857142$

3. निम्नलिखित को p/q के रूप में व्यक्त करें, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$.

i) 0.6 ii) 0.47 iii) 0.001

समाधान:

i) 0.6

मान लीजिए $x = 0.6$

$$x = 0.666 \dots (1)$$

चूँकि दशमलव के बाद एक अंक दोहराया जा रहा है, इसलिए हम समीकरण (1) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करेंगे।

इससे हमें,

$$10x = 6.666\dots$$

$$10x = 6 + 0.666$$

$$10x = 6 + x \text{ [समीकरण (1) से]}$$

$$10x - x = 6$$

$$9x = 6$$

$$x = 6/9$$

$$x = 2/3$$

इस प्रकार, $0.\overline{6} = 2/3$

ii) $0.4\overline{7}$

मान लीजिए $x = 0.4777 \dots\dots(1)$

यहाँ, पुनरावृत्ति पहले दशमलव स्थान के बाद शुरू होती है और एक अंक दोहराया जाता है। इस प्रकार, हम समीकरण (1) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करते हैं।

$$10x = 4.777 \dots\dots(2)$$

हम समीकरण (1) को समीकरण (2) से घटाएंगे।

$$10x - x = 4.777\dots - 0.4777\dots$$

$$9x = 4.3$$

$$9x = 43/10$$

$$x = 43/90$$

इस प्रकार, $0.4\overline{7} = 43/90$

iii) $0.001\overline{001}$

मान लीजिए $x = 0.001001 \dots\dots(1)$

चूँकि 3 अंक दोहराए गए हैं, समीकरण (1) के दोनों पक्षों को 1000 से गुणा करें।

$$1000x = 1.001001$$

$$1000x = 1 + 0.001001$$

$$1000x = 1 + x \text{ [समीकरण (1) से]}$$

$$1000x - x = 1$$

$$999x = 1$$

$$x = 1/999$$

इस प्रकार, $0.001 = 1/999$

4. 0.99999 को p/q के रूप में व्यक्त करें। क्या आपको अपने उत्तर से आश्चर्य हुआ? अपने शिक्षक और सहपाठियों के साथ चर्चा करें कि यह उत्तर क्यों उचित है।

समाधान:

$$\text{मान लीजिए } x = 0.99999 \dots (1)$$

चूँकि दशमलव के बाद एक अंक दोहराया जाता है, इसलिए हम समीकरण (1) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करेंगे।

$$10x = 9.9999$$

$$10x = 9 + 0.9999$$

$$10x = 9 + x \text{ [समीकरण (1) से]}$$

$$10x - x = 9$$

$$9x = 9$$

$$x = 1$$

$$\text{अतः, } 0.99999 = 1$$

आइये हम इसके बारे में कल्पना करके सोचें।

आइए दो संख्याएँ **0.9** और **1** लें । हम जानते हैं कि इस अंतराल में आने वाली संख्याएँ 0.9, 0.91, 0.92, ..., 0.99, 1 होंगी। यहाँ, 0.99, 1 के अधिक निकट है।

अब, आइए **0.99** से **1** का अंतराल लें । इस अंतराल में आने वाली संख्याएँ 0.99, 0.991, ..., 0.999, 1 होंगी। हम देखते हैं कि 0.999, 1 के अधिक निकट है।

इसी प्रकार, अंतरालों को बड़ा करने की यह प्रक्रिया जारी रहती है और अब हम **0.9999** से **1** के अंतराल पर पहुँच जाते हैं। इस अंतराल में आने वाली संख्याएँ 0.99991, 0.99992,..., 0.99999, 1 होंगी।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि चाहे हम कितने भी अंतराल लें, 0.99999... हमेशा 1 के करीब होता है।

अतः हम कह सकते हैं कि $0.99999 = 1$ जो कि बीजगणितीय रूप से सिद्ध है।

5. $1/17$ के दशमलव प्रसार (decimal expansion) में अंकों की पुनरावृत्ति खंड (repeating block) में अंकों की अधिकतम संख्या कितनी हो सकती है? अपने उत्तर की जाँच करने के लिए विभाजन-विधि (long division) से समझाइए।

$1/17$ के दशमलव प्रसार (0.0588235294117647...) में पुनरावृत्ति खंड में अधिकतम 16 अंक हो सकते हैं।

$$\begin{array}{r}
 0.0588235294117647 \\
 17 \overline{) 100} \\
 \underline{- 85} \\
 150 \\
 \underline{- 136} \\
 140 \\
 \underline{- 136} \\
 40 \\
 \underline{- 34} \\
 60 \\
 \underline{- 51} \\
 90 \\
 \underline{- 85} \\
 50 \\
 \underline{- 34} \\
 160 \\
 \underline{- 153} \\
 70 \\
 \underline{- 68} \\
 20 \\
 \underline{- 17} \\
 30 \\
 \underline{- 17} \\
 130 \\
 \underline{- 119} \\
 110 \\
 \underline{- 102} \\
 80 \\
 \underline{- 68} \\
 120 \\
 \underline{- 119} \\
 1
 \end{array}$$

विभाजन विधि द्वारा 1 को 17 से विभाजित करने पर यह सिद्ध होता है, जहाँ शेषफल 1 के पुनरावर्ती होने तक 16 अंक होते हैं।

6. p/q ($q \neq 0$) के रूप में परिमेय संख्याओं के कई उदाहरण देखें, जहाँ p और q पूर्णांक हैं जिनमें 1 के अलावा कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है और जिनके सांत दशमलव निरूपण (प्रसार) हैं। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि q किस गुण को संतुष्ट करता है?

समाधान:

हम p/q ($q \neq 0$) के रूप में परिमेय संख्याओं के कुछ उदाहरण देखेंगे, जहाँ उनके दशमलव निरूपण अंतक हैं।

$$2/5 = 0.4$$

$$3/100 = 0.03$$

$$27/16 = 1.6875$$

$$33/50 = 0.66$$

आइए उपरोक्त परिमेय संख्याओं के हरों का अवलोकन करें।

$$2/5 = 2 / (2^0 \times 5^1)$$

$$3/100 = 3 / (2^2 \times 5^2)$$

$$27/16 = 27 / (2^4 \times 5^0)$$

$$33/50 = 33 / (2^1 \times 5^2)$$

हम देखते हैं कि उपरोक्त परिमेय संख्याओं के हर $2^a \times 5^b$ के रूप में हैं, जहाँ a और b पूर्ण संख्याएँ हैं।

अतः यदि $q, 2^a \times 5^b$ के रूप में है तो p/q एक सांत दशमलव है।

7. ऐसी तीन संख्या लिखिए जिनके दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती हो

समाधान:

ऐसी तीन संख्याएँ जिनके दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती होते हैं, वे अपरिमेय संख्याएँ होती हैं, जैसे $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π (पाई), और e । आप स्वयं भी एक पैटर्न बनाकर ऐसी संख्याएँ बना सकते हैं, जैसे 0.1010010001... या 0.2020020002....

8. परिमेय संख्याओं $5/7$ और $9/11$ के बीच तीन भिन्न अपरिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल. परिमेय संख्याएँ $5/7$ और $9/11$ के बीच तीन अपरिमेय संख्याएँ ज्ञात करने के लिए, पहले दोनों संख्याओं के दशमलव प्रसार ज्ञात करें: $5/7 \approx 0.714285...$ और $9/11 \approx 0.818181...$ । इन दशमलव संख्याओं के बीच, ऐसी तीन संख्याएँ लिखें जिनका दशमलव प्रसार अनवसानी (न समाप्त होने वाला) और अनावर्ती (न दोहराने वाला) हो, जैसे $0.720720072000...$, $0.730730073000...$, और $0.808008000800....$

चरण 1: दी गई परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार ज्ञात करें

- $5/7$ का दशमलव प्रसार है: $0.714285714285...$ (यानी, 0.714285)
- $9/11$ का दशमलव प्रसार है: $0.81818181...$ (यानी, 0.81)

चरण 2: अपरिमेय संख्याएँ लिखने के लिए पैटर्न का उपयोग करें

एक अपरिमेय संख्या एक ऐसी संख्या होती है जिसके दशमलव प्रसार में अंक किसी पैटर्न में बार-बार नहीं आते और वह कभी समाप्त नहीं होता है।

हम इन दोनों दशमलव के बीच ऐसी संख्याएँ बना सकते हैं जो $0.714285...$ से बड़ी हो और $0.818181...$ से छोटी हो। $0.720720072000...$, $0.730730073000...$, $0.808008000800...$

ये तीनों संख्याएँ इन दी गई परिमेय संख्याओं के बीच में हैं और ये सभी अनवसानी अनावर्ती (न समाप्त होने वाली, न दोहराने वाली) हैं, इसलिए ये अपरिमेय संख्याएँ हैं।

9. निम्नलिखित संख्याओं को परिमेय या अपरिमेय के रूप में वर्गीकृत करें:

i) $\sqrt{23}$ ii) $\sqrt{225}$ iii) 0.3796 iv) $7.478478...$ v) $1.101001000100001...$

समाधान:

i) $\sqrt{23}$

$\sqrt{23} = \sqrt{23/1} = p/q$, लेकिन p एक पूर्णांक नहीं है ।

अतः $\sqrt{23}$ एक अपरिमेय संख्या है ।

ii) $\sqrt{225}$

$\sqrt{225} = 15/1 = p/q$, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$.

अतः $\sqrt{225}$ एक परिमेय संख्या है ।

iii) 0.3796

0.3796 एक परिमेय संख्या है क्योंकि यह एक सांत दशमलव संख्या है ।

iv) 7.478478...

7.478478... एक परिमेय संख्या है क्योंकि यह एक अनवसानी आवर्ती दशमलव है, अर्थात् संख्याओं का समूह 478 आवर्ती है।

v) 1.101001000100001

यह एक अपरिमेय संख्या है क्योंकि यह एक अनवसानी एवं अनावर्ती दशमलव है।