Class 9th

गणित

अध्याय 2

बहुपद

प्रश्नावली 2.3

1. निर्धारित करें कि निम्नलिखित में से किस बहुपद का गुणनखंड (x + 1) है:

i) $x^3 + x^2 + x + 1$ ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

समाधान:

जब एक बहुपद p(x) को (x - a) से विभाजित किया जाता है और यदि p(a) = 0 है तो (x - a) p(x) का एक गुणनखंड है।

x + 1 = 0 का मूल -1 है ।

(i) मान लीजिए $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

इसलिए, $p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$\Rightarrow -1 + 1 - 1 + 1 = 0$

चूँकि p(-1) का शेषफल 0 है, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि x + 1, $x^3 + x^2 + x + 1$ का एक गुणनखंड है ।

(ii) मान लीजिए $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

इसलिए, $p(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1$

$= 1 \neq 0$

चूँकि शेष $p(-1) \neq 0$ है, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $x + 1$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ का गुणनखंड नहीं है।

(iii) मान लीजिए $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

इसलिए, $p(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) + 1$

$= 1 - 3 + 3 - 1 + 1$

$= 1 \neq 0$

चूँकि शेष $p(-1) \neq 0$ है, $x + 1$, $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ का गुणनखंड नहीं है।

(iv) मान लीजिए $p(x) = x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

$\therefore p(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (2 + \sqrt{2})(-1) + \sqrt{2}$

$= -1 - 1 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2} \neq 0$

चूँकि शेष $p(-1) \neq 0$ है, $x + 1$, $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$ का गुणनखंड नहीं है।

2. गुणनखंड प्रमेय का उपयोग करके निर्धारित करें कि क्या g(x) निम्नलिखित प्रत्येक स्थिति में p(x) का गुणनखंड है:

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$, $g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 3$

समाधान:

गुणनखंड प्रमेय के अनुसार , (x - a) बहुपद p(x) का एक गुणनखंड है यदि p(a) = 0 है।

यह जानने के लिए कि क्या g(x) = x + a, p(x) का एक गुणनखंड है, हमें g(x) का मूल ज्ञात करना होगा ।

x + a = 0

⇒ x = -a

(i) मान लीजिए $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$, $g(x) = x + 1$

एक्स + 1 = 0

⇒ x = -1

अब,

पी(-1) = $2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1$

= -2 + 1 + 2 - 1

= 0

चूँकि शेष p(-1) = 0 है, गुणनखंड प्रमेय से हम कह सकते हैं कि g(x) = x + 1, $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$ का एक गुणनखंड है।

(ii) मान लीजिए $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, g(x) = x + 2

x + 2 = 0

⇒ x = -2

अब,

पी(-2) = $(-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1$

= -8 + 12 - 6 + 1

$= -1 \neq 0$

चूँकि शेष $p(-2) \neq 0$ है, गुणनखंड प्रमेय से हम कह सकते हैं कि $g(x) = x + 2$, $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ का गुणनखंड नहीं है।

(iii) मान लीजिए $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 3$

$x - 3 = 0$

$\Rightarrow x = 3$

अब,

पी$(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + 3 + 6$

$= 27 - 36 + 3 + 6$

$= 0$

चूँकि $p(3)$ का शेषफल $= 0$ है, गुणनखंड प्रमेय से हम कह सकते हैं कि $g(x) = x - 3$, $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ का एक गुणनखंड है

3. k का मान ज्ञात कीजिए, यदि x - 1 निम्नलिखित प्रत्येक स्थिति में p(x) का एक गुणनखंड है:

(i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

समाधान:

गुणनखंड प्रमेय के अनुसार , यदि $x - 1$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है , तो $p(1) = 0$

(i) $p(x) = x^2 + x + k$

चूँकि, $x - 1$ दिए गए बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखंड है, अतः $p(1) = 0$

$\Rightarrow p(1) = (1)^2 + (1) + k$

$\Rightarrow 0 = 2 +$ के

$\Rightarrow k = -2$

(ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

चूँकि, x - 1 दिए गए बहुपद p(x) का एक गुणनखंड है, अतः p(1) = 0

$\Rightarrow p(1) = 2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2}$

$\Rightarrow 0 = 2 + k + \sqrt{2}$

$\Rightarrow k = -(2 + \sqrt{2})$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

चूँकि, x - 1 दिए गए बहुपद p(x) का एक गुणनखंड है, अतः p(1) = 0

$p(1) = k(1)^2 - (\sqrt{2} \times 1) + 1$

$0 = k - \sqrt{2} + 1$

$\Rightarrow k = \sqrt{2} - 1$

(iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

चूँकि, x - 1 दिए गए बहुपद p(x) का एक गुणनखंड है, अतः p(1) = 0

$\Rightarrow p(1) = k(1)^2 - 3(1) + k$

$\Rightarrow 0 = 2k - 3$

$\Rightarrow k = 3/2$

4. गुणनखंड करें: (i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$ (iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

समाधान:

मध्य पद के विभाजन से , हम निम्नलिखित विधि का उपयोग करके कारक पा सकते हैं।

दो संख्याएँ p, q ज्ञात कीजिए जिससे,

$p + q = x$ का गुणांक

$p \times q = x^2$ के गुणांक और स्थिर पद का गुणनफल ।

(i) $12x^2 - 7x + 1$

$p + q = -7$ (x का गुणांक)

$p \times q = 12 \times 1 = 12$ (x^2 का गुणांक और स्थिर पद)

परीक्षण और त्रुटि विधि से, हम पाते हैं $p = -4$, $q = -3$

अब दिए गए बहुपद के मध्य पद को विभाजित करते हुए ,

$12x^2 - 7x + 1 = 12x^2 - 4x - 3x + 1$

$= 4x(3x - 1) - 1(3x - 1)$

$= (3x - 1)(4x - 1)$ [(3x - 1) को एक सामान्य पद के रूप में लेते हुए]

(ii) $2x^2 + 7x + 3$

$p + q = 7$ (x का गुणांक)

$p \times q = 2 \times 3 = 6$ (x^2 के गुणांक और स्थिर पद का गुणनफल)

परीक्षण और त्रुटि विधि से, हमें $p = 6$, $q = 1$ प्राप्त होता है।

अब दिए गए बहुपद के मध्य पद को विभाजित करने पर,

$2x^2 + 7x + 3 = 2x^2 + 6x + x + 3$

$= 2x(x + 3) + 1(x + 3)$

$= (2x + 1)(x + 3)$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$

$p + q = 5$ (x का गुणांक)

$p \times q = 6 \times (-6) = -36$ (x^2 के गुणांक और स्थिर पद का गुणनफल)

परीक्षण और त्रुटि विधि से, हमें $p = 9$, $q = -4$ प्राप्त होता है।

अब दिए गए बहुपद के मध्य पद को विभाजित करने पर,

$6x^2 + 5x - 6 = 6x^2 + 9x - 4x - 6$

$= 3x(2x + 3) - 2(2x + 3)$

$= (3x - 2)(2x + 3)$

(iv) $3x^2 - x - 4$

$p + q = -1$ (x का गुणांक)

$p \times q = 3 \times (-4) = -12$ (x^2 के गुणांक और स्थिर पद का गुणनफल)

परीक्षण और त्रुटि विधि से, हमें $p = -4$, $q = 3$ प्राप्त होता है।

अब दिए गए बहुपद के मध्य पद को विभाजित करने पर,

$3x^2 - x - 4 = 3x^2 - 4x + 3x - 4$

$= 3x^2 + 3x - 4x - 4$

$= 3x(x + 1) - 4(x + 1)$

$= (3x - 4)(x + 1)$

5. गुणनखंड करें: (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$
iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

समाधान:

(i) मान लीजिए $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

गुणनखंड प्रमेय से हम जानते हैं कि $x - a$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है यदि $p(a) = 0$.

हम x के कुछ परीक्षण मान, मान लीजिए $x = 1$, का उपयोग करके $p(x)$ का गुणनखंड ज्ञात करेंगे।

पी(1) $= (1)^3 - 2(1)^2 - 1 + 2$

$= 1 - 2 - 1 + 2 = 0$

चूँकि शेष $p(1) = 0$ है, गुणनखंड प्रमेय से हम कह सकते हैं कि $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, $x - 1$ से विभाज्य है।

अब लंबी विभाजन विधि का उपयोग करके $p(x)$ को $x - 1$ से विभाजित करें ,

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x - 2 \\
\hline
x - 1 & x^3 - 2x^2 - x + 2 \\
 & x^3 - x^2 \\
\hline
 & -x^2 - x \\
 & -x^2 + x \\
\hline
 & -2x + 2 \\
 & -2x + 2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

अतः $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2)$

अब $x^2 - x - 2$ लेते हुए, दो संख्याएँ p, q ज्ञात कीजिए जैसे कि:

$p + q = x$ का गुणांक

$p \times q = x^2$ के गुणांक और स्थिर पद का गुणनफल

$p + q = -1$ (x का गुणांक)

$p \times q = 1 \times (-2) = -2$ (x^2 का गुणांक और स्थिर पद)

परीक्षण और त्रुटि विधि से, हमें $p = -2$, $q = 1$ प्राप्त होता है।

अब दिए गए बहुपद के मध्य पद को विभाजित करते हुए ,

$x^2 - x - 2 = x^2 - 2x + x - 2$

$= x(x - 2) + 1(x - 2)$

$= (x + 1)(x - 2)$

$\therefore x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x - 2)(x + 1)$

विधि 2:

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^3 - 2x^2) - (x - 2)$

= एक्स ^{2} (एक्स - 2) - 1(एक्स - 2)

$= (x - 2)(x^2 - 1)$

$= (x - 2)(x + 1)(x - 1)$ ($a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ का उपयोग करके)

(ii) मान लीजिए $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

हम y के कुछ परीक्षण मान, मान लीजिए $x = -1$, का उपयोग करके p(y) का एक गुणनखंड ज्ञात करेंगे

पी(-1) = $(-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 5$

$= -1 - 3 + 9 - 5$

$= -9 + 9 = 0$

चूँकि शेष p(-1) = 0 है, गुणनखंड प्रमेय से हम कह सकते हैं कि x + 1, p(x) = x^3 - $3x^2$ - 9x - 5 का एक गुणनखंड है।

अब दीर्घ विभाजन का उपयोग करके p(x) को x + 1 से विभाजित करें।

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x - 5 \\
\hline
x+1 & x^3 - 3x^2 - 9x - 5 \\
 & x^3 + x^2 \\
\hline
 & -4x^2 - 9x \\
 & -4x^2 - 4x \\
\hline
 & -5x - 5 \\
 & -5x - 5 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

अतः x^3 - $3x^2$ - 9x - 5 = (x +1) (x^2 - 4x - 5)

अब x^2 - 4x - 5 लेते हुए, दो संख्याएँ p, q ज्ञात कीजिए जैसे कि:

p + q = -4 (x का गुणांक)

p × q = 1 × -5 = -5 (x^2 के गुणांक और स्थिर पद का गुणनफल)

परीक्षण और त्रुटि विधि से, हमें p = -5, q = 1 प्राप्त होता है।

अब दिए गए बहुपद के मध्य पद को विभाजित करने पर,

x^2 - 4x - 5 = x^2 - 5x + x - 5

= x(x - 5) + 1(x - 5)

= (x + 1)(x - 5)

इसलिए, x^3 - $3x^2$ - 9x - 5 = (x + 1) (x - 5) (x + 1) = $(x + 1)^2$ (x - 5)

(iii) मान लीजिए $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

हम x के किसी परीक्षण मान, मान लीजिए x = -1, का उपयोग करके p(x) का गुणनखंड ज्ञात करेंगे। (क्योंकि सभी पद धनात्मक हैं।)

पी(-1) = $(-1)^3 + 13(-1)^2 + 32(-1) + 20$

= -1 + 13 - 32 + 20 = 0

चूँकि शेष p(-1) = 0 है, गुणनखंड प्रमेय से हम कह सकते हैं कि x + 1, $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ का एक गुणनखंड है।

अब दीर्घ विभाजन विधि का उपयोग करके p(x) को x + 1 से भाग देने पर,

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 12x + 20 \\
\hline
x+1 & x^3 + 13x^2 + 32x + 20 \\
 & x^3 + x^2 \\
\hline
 & 12x^2 + 32x \\
 & 12x^2 + 12x \\
\hline
 & 20x + 20 \\
 & 20x + 20 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

इसलिए, $x^3 + 13x^2 + 32x + 20 = (x + 1)(x^2 + 12x + 20)$

अब $x^2 + 12x + 20$ लेते हुए, दो संख्याएँ p, q ज्ञात कीजिए जैसे कि:

p + q = 12 (x का गुणांक)

p × q = 1 × 20 = 20 (x^2 के गुणांक और स्थिर पद का गुणनफल)

परीक्षण और त्रुटि विधि से, हमें p = 10, q = 2 प्राप्त होता है।

अब दिए गए बहुपद के मध्य पद को विभाजित करने पर,

$x^2 + 12x + 20 = x^2 + 10x + 2x + 20$

= एक्स(एक्स + 10) + 2(एक्स + 10)

= (x + 10) (x + 2)

इसलिए, $x^3 + 13x^2 + 32x + 20 = (x + 1)(x + 10)(x + 2)$

विधि 2:

$x^3 + 13x^2 + 32x + 20 = x^3 + 10x^2 + 3x^2 + 30x + 2x + 20$

= एक्स ^{2} (एक्स + 10) + 3x(एक्स + 10) + 2(एक्स + 10)

$= (x + 10)(x^2 + 3x + 2)$

$= (x + 10)(x^2 + 2x + x + 2)$

= (x + 10) [x(x + 2) + 1(x + 2)]

= (x + 10) (x + 2) (x + 1)

(iv) मान लीजिए $p(x) = 2y^3 + y^2 - 2y - 1$

हम y के कुछ परीक्षण मान, मान लीजिए y = 1, का उपयोग करके p(y) का गुणनखंड ज्ञात करेंगे।

पी(1) = $2(1)^3 + (1)^2 - 2(1) - 1$

= 2 + 1 - 2 - 1 = 0

चूँकि p(1) का शेषफल = 0 है, गुणनखंड प्रमेय से हम कह सकते हैं कि y - 1, $p(y) = 2y^3 + y^2 - 2y - 1$ का एक गुणनखंड है

अब दीर्घ विभाजन विधि का उपयोग करके p(y) को y - 1 से भाग देने पर,

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2y^2+3y+1 \\
\hline
y-1 & 2y^3+y^2-2y-1 \\
 & 2y^3-2y^2 \\
\hline
 & 3y^2-2y \\
 & 3y^2-3y \\
\hline
 & y-1 \\
 & y-1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

इसलिए, $2y^3 + y^2 - 2y - 1 = (y - 1)(2y^2 + 3y + 1)$

अब $2y^2 + 3y + 1$ लेते हुए, दो संख्याएँ p, q ज्ञात कीजिए जैसे कि:

$p + q = 3$ (y का गुणांक)

$p \times q = 2 \times 1 = 2$ (y^2 के गुणांक और स्थिर पद का गुणनफल)

परीक्षण और त्रुटि विधि से, हमें $p = 2$, $q = 1$ प्राप्त होता है।

अब दिए गए बहुपद के मध्य पद को विभाजित करने पर,

$2y^2 + 3y + 1 = 2y^2 + 2y + y + 1$

$= 2y(y + 1) + 1(y + 1)$

$= (2y + 1)(y + 1)$

इसलिए, $2y^3 + y^2 - 2y - 1 = (y - 1)(2y + 1)(y + 1)$