

Class 9th

गणित

अध्याय 2

बहुपद

प्रश्नावली 2.4

1. निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात करने के लिए उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग कीजिए:
(i) $(x + 4)(x + 10)$ (ii) $(x + 8)(x - 10)$ (iii) $(3x + 4)(3x - 5)$
(iv) $(y^2 + 3/2)(y^2 - 3/2)$ (v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

समाधान:

आइए दी गई समस्या को हल करने के लिए बीजीय सर्वसमिकाओं का उपयोग करें।

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(ए + बी)(ए - बी) = ए^2 - बी^2$$

(i) $(x + 4)(x + 10)$

सर्वसमिका का उपयोग करते हुए: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

यहाँ $a = 4, b = 10$

अब, आइए दी गई पहचान में 'a' और 'b' के मान प्रतिस्थापित करें।

$$(x + 4)(x + 10) = x^2 + (4 + 10)x + 4 \times 10$$

$$= x^2 + 14x + 40$$

(ii) $(x + 8)(x - 10)$

सर्वसमिका का उपयोग: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

यहाँ $a = 8, b = -10$

$$(x + 8)(x - 10) = x^2 + (8 - 10)x + (8)(-10)$$

$$= x^2 - 2x - 80$$

(iii) $(3x + 4)(3x - 5)$

सर्वसमिका का उपयोग: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

यहाँ $x \rightarrow 3x, a = 4, b = -5$

$$(3x + 4)(3x - 5) = (3x)^2 + (4 - 5)(3x) + (4)(-5)$$

$$= 9x^2 - 3x - 20$$

(iv) $(y^2 + 3/2)(y^2 - 3/2)$

सर्वसमिका का उपयोग करते हुए: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

यहाँ, $a = y^2, b = 3/2$

$$(y^2 + 3/2)(y^2 - 3/2)$$

$$= (y^2)^2 - (3/2)^2$$

$$= y^4 - 9/4$$

(v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

सर्वसमिका का उपयोग करते हुए: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

यहाँ $a = 3, b = 2x$

$$(3 - 2x)(3 + 2x) = (3)^2 - (2x)^2$$

$$= 9 - 4x^2$$

2. सीधे गुणा किए बिना निम्नलिखित गुणनफल का मूल्यांकन करें:

(i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

समाधान: बीजीय सर्वसमिकाओं का उपयोग करते हुए ,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(ए + बी)(ए - बी) = ए^2 - बी^2$$

(i) 103×107

सर्वसमिका: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$$103 \times 107 = (100 + 3)(100 + 7)$$

उपरोक्त सर्वसमिका में $x = 100$, $a = 3$, $b = 7$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$= (100)^2 + (3 + 7)(100) + (3)(7)$$

$$= 10000 + 1000 + 21$$

$$= 11021$$

(ii) 95×96

सर्वसमिका: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$$95 \times 96 = (100 - 5)(100 - 4)$$

उपरोक्त सर्वसमिका में $x = 100$, $a = -5$, $b = -4$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$= (100)^2 + (-5 - 4)(100) + (-5)(-4)$$

$$= 10000 - 900 + 20$$

$$= 9120$$

(iii) 104×96

सर्वसमिका: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$104 \times 96 = (100 + 4)(100 - 4)$$

उपरोक्त सर्वसमिका में $a = 100$, $b = 4$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$= (100)^2 - (4)^2$$

$$= 10000 - 16$$

$$= 9984$$

3. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का उपयोग करके निम्नलिखित का गुणनखंडन कीजिए:

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$ (iii) $x^2 - y^2/100$

समाधान:

बीजीय सर्वसमिकाओं का उपयोग करते हुए ,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$

$$= (3x)^2 + 2(3x)(y) + (y)^2$$

सर्वसमिका: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$a = 3x$ और $b = y$ मानते हुए

अतः $9x^2 + 6xy + y^2 = (3x + y)^2$

(ii) $4y^2 - 4y + 1$

$$= (2y)^2 - 2(2y)(1) + (1)^2$$

सर्वसमिका: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a = 2y$ और $b = 1$ मानते हुए

अतः $4y^2 - 4y + 1 = (2y - 1)^2$

(iii) $x^2 - y^2/100$

$$= x^2 - (y/10)^2$$

सर्वसमिका: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$a = x$ और $b = y/10$ मानते हुए

अतः, $x^2 - y^2/100 = (x + y/10)(x - y/10)$

4. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित में से प्रत्येक का विस्तार कीजिए:

- i) $(x + 2y + 4z)^2$ ii) $(2x - y + z)^2$ iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$ iv) $(3a - 7b - c)^2$
v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ vi) $[(1/4)a - (1/2)b + 1]^2$

समाधान:

i) $(x + 2y + 4z)^2$

सर्वसमिका का उपयोग करते हुए : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$a = x, b = 2y, c = 4z$ लेते हुए

$$\begin{aligned}(x + 2y + 4z)^2 &= x^2 + (2y)^2 + (4z)^2 + 2(x)(2y) + 2(2y)(4z) + 2(4z)(x) \\ &= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8zx\end{aligned}$$

ii) $(2x - y + z)^2$

सर्वसमिका का उपयोग करते हुए: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$a = 2x, b = -y, c = z$ लेते हुए

$$\begin{aligned}(2x - y + z)^2 &= (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(2x) \\ &= 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx\end{aligned}$$

iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

सर्वसमिका का उपयोग करते हुए: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$a = -2x, b = 3y, c = 2z$ लेते हुए

$$\begin{aligned}(-2x + 3y + 2z)^2 &= (-2x)^2 + (3y)^2 + (2z)^2 + 2(-2x)(3y) + 2(3y)(2z) + 2(2z)(-2x) \\ &= 4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8zx\end{aligned}$$

iv) $(3a - 7b - c)^2$

सर्वसमिका का उपयोग करते हुए: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$a = 3a, b = -7b, c = -c$ लेते हुए

$$(3a - 7b - c)^2 = (3a)^2 + (-7b)^2 + (-c)^2 + 2(3a)(-7b) + 2(-7b)(-c) + 2(-c)(3a)$$

$$= 9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ca$$

$$v) (-2x + 5y - 3z)^2$$

सर्वसमिका का उपयोग करते हुए: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$$a = -2x, b = 5y, c = -3z \text{ लेते हुए}$$

$$(-2x + 5y - 3z)^2 = (-2x)^2 + (5y)^2 + (-3z)^2 + 2(-2x)(5y) + 2(5y)(-3z) + 2(-3z)(-2x)$$

$$= 4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12zx$$

$$vi) [(1/4)a - (1/2)b + 1]^2$$

सर्वसमिका का उपयोग करते हुए: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$$a = (1/4)a, b = (-1/2)b, c = 1 \text{ लेते हुए}$$

$$[(1/4)a - (1/2)b + 1]^2 = [(a/4)^2 + (-b/2)^2 + (1)^2 + 2(a/4)(-b/2) + 2(-b/2)(1) + 2(1)(a/4)]$$

$$= (1/16)a^2 + (1/4)b^2 + 1 - (1/4)ab - b + (1/2)a$$

5. गुणनखंड करें: (i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

समाधान:

हम निम्नलिखित को हल करने के लिए बीजीय सर्वसमिका $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ का उपयोग करेंगे ।

$$i) 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$$

इसे पुनः इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$(2x)^2 + (3y)^2 + (-4z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(3y)(-4z) + 2(-4z)(2x)$$

यह $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$ के रूप का है

$$\text{यहाँ } a = 2x, b = 3y, c = -4z$$

$$\text{अतः, } 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz = (2x + 3y - 4z)^2$$

$$ii) 2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$$

हम जानते हैं कि, $2 = (\sqrt{2})^2$, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

इस प्रकार, दी गई अभिव्यक्ति को इस प्रकार पुनः लिखा जा सकता है:

$$(-\sqrt{2}x)^2 + (y)^2 + (2\sqrt{2}z)^2 + 2(-\sqrt{2}x)(y) + 2(y)(2\sqrt{2}z) + 2(2\sqrt{2}z)(-\sqrt{2}x)$$

यह $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$ के रूप का है

यहाँ $a = -\sqrt{2}x$, $b = y$, $c = 2\sqrt{2}z$

$$\text{अतः } 2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz = (-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)^2$$

6. निम्नलिखित घनों को विस्तारित रूप में लिखिए:

i) $(2x + 1)^3$ ii) $(2a - 3b)^3$ iii) $(3x/2 + 1)^3$

iv) $(x - 2y/3)^3$

समाधान:

हम नीचे दी गई बीजीय सर्वसमिकाओं का उपयोग करेंगे :

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

$$(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$$

i) $(2x + 1)^3$

$$\text{सर्वसमिका: } (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

यहाँ $x = 2x$, $y = 1$

$$(2x + 1)^3 = (2x)^3 + (1)^3 + 3(2x)(1)(2x + 1)$$

$$= 8x^3 + 1 + 6x(2x + 1)$$

$$= 8x^3 + 1 + 12x^2 + 6x$$

$$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

ii) $(2a - 3b)^3$

$$\text{सर्वसमिका: } (x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$$

यहाँ $x = 2a$, $y = 3b$

$$(2a - 3b)^3 = (2a)^3 - (3b)^3 - 3(2a)(3b)(2a - 3b)$$

$$= 8a^3 - 27b^3 - 18ab(2a - 3b)$$

$$= 8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2$$

$$= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$$

iii) $(3x/2 + 1)^3$

सर्वसमिका: $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

यहाँ, $x = 3x/2, y = 1$

$$(3x/2 + 1)^3 = (3x/2)^3 + (1)^3 + 3(3x/2)(1)(3x/2 + 1)$$

$$= (27/8)x^3 + 1 + (9/2)x(3x/2 + 1)$$

$$= (27/8)x^3 + 1 + (27/4)x^2 + (9/2)x$$

$$= (27/8)x^3 + (27/4)x^2 + (9/2)x + 1$$

iv) $(x - 2y/3)^3$

सर्वसमिका: $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

यहाँ, $x = x, y = 2y/3$

$$(x - 2y/3)^3 = x^3 - (2y/3)^3 - 3(x)(2y/3)(x - 2y/3)$$

$$= x^3 - (8/27)y^3 - 2xy(x - 2y/3)$$

$$= x^3 - (8/27)y^3 - 2x^2y + (4/3)xy^2$$

$$= x^3 - 2x^2y + (4/3)xy^2 - (8/27)y^3$$

7. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का उपयोग करके निम्नलिखित का मूल्यांकन करें:

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

समाधान:

हम दिए गए व्यंजकों का मूल्यांकन करने के लिए निम्नलिखित बीजीय सर्वसमिकाओं का उपयोग करेंगे।

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

$$(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$$

$$(i) (99)^3 = (100 - 1)^3$$

पहचान: यहाँ हम $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ का उपयोग कर सकते हैं

आइए $x = 100, y = 1$ प्रतिस्थापित करें

$$(99)^3 = (100)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)(100 - 1)$$

$$= 1000000 - 1 - 300 \times 99$$

$$= 999999 - 29700$$

$$= 970299$$

$$(ii) (102)^3 = (100 + 2)^3$$

$$\text{सर्वसमिका: } (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

आइए $x = 100, y = 2$ प्रतिस्थापित करें

$$(102)^3 = (100)^3 + (2)^3 + 3(100)(2)(100 + 2)$$

$$= 1000000 + 8 + 600 \times 102$$

$$= 1000008 + 61200$$

$$= 1061208$$

$$(iii) (998)^3 = (1000 - 2)^3$$

$$\text{सर्वसमिका: } (x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$$

आइए $x = 1000, y = 2$ प्रतिस्थापित करें

$$(998)^3 = (1000)^3 - (2)^3 - 3(1000)(2)(1000 - 2)$$

$$= 1000000000 - 8 - 6000 \times 998$$

$$= 999999992 - 5988000$$

$$= 994011992$$

8. निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखंड कीजिए:

i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

v) $27p^3 - 1/216 - (9/2)p^2 + (1/4)p$

समाधान:

हम निम्नलिखित को हल करने के लिए निम्नलिखित बीजीय सर्वसमिकाओं का उपयोग करेंगे:

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$$

$$(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$$

i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

इसे इस प्रकार पुनः लिखा जा सकता है: $(2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$

जो $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$ के रूप का है

यहाँ, $x = 2a$, $y = b$

$$\text{अतः } 8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2 = (2a + b)^3$$

ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

इसे इस प्रकार पुनः लिखा जा सकता है: $(2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$

जो $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ के रूप का है

यहाँ, $x = 2a$, $y = b$

$$\text{अतः } 8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2 = (2a - b)^3$$

iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

इसे इस प्रकार पुनः लिखा जा सकता है: $(3)^3 - (5a)^3 - 3(3)^2(5a) + 3(3)(5a)^2$

जो $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ के रूप का है

यहाँ, $x = 3$, $y = 5a$

$$\text{अतः } 27 - 125a^3 - 135a + 225a^2 = (3 - 5a)^3$$

$$\text{iv) } 64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$$

इसे इस प्रकार पुनः लिखा जा सकता है: $(4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)^2(3b) + 3(4a)(3b)^2$

जो $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ के रूप का है

यहाँ, $x = 4a$, $y = 3b$

$$\text{अतः } 64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2 = (4a - 3b)^3$$

$$\text{v) } 27p^3 - 1/216 - (9/2)p^2 + (1/4)p$$

इसे इस प्रकार पुनः लिखा जा सकता है: $(3p)^3 - (1/6)^3 - 3 \times (3p)^2 \times 1/6 + 3 \times 3p \times (1/6)^2$

जो $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ के रूप का है

यहाँ, $x = 3p$, $y = 1/6$

$$\text{अतः, } 27p^3 - 1/216 - (9/2)p^2 + (1/4)p = (3p - 1/6)^3$$

9. सत्यापित करें: i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

समाधान:

$$\text{i) } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

दाएँ पक्ष लेते हुए,

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2)$$

$$= x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3$$

$$= x^3 + y^3 = \text{बायाँ पक्ष}$$

$$\text{ii) } x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

दाएँ पक्ष लेते हुए,

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2)$$

$$= x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3$$

$$= x^3 - y^3 = \text{बायाँ पक्ष}$$

अतः सत्यापित.

१०. निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखंड कीजिए:

i) $27y^3 + 125z^3$ ii) $64m^3 - 343n^3$

[संकेत: प्रश्न 9 देखें]

समाधान:

i) $27y^3 + 125z^3 = (3y)^3 + (5z)^3$

गुणनखंडन का उपयोग करते हुए : $(x^3 + y^3) = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

यहाँ, $x = 3y$ और $y = 5z$

$$(3y)^3 + (5z)^3 = (3y + 5z)[(3y)^2 - (3y)(5z) + (5z)^2]$$

इस प्रकार, $27y^3 + 125z^3 = (3y + 5z)(9y^2 - 15yz + 25z^2)$

ii) $64m^3 - 343n^3 = (4m)^3 - (7n)^3$

गुणनखंडन का उपयोग: $(x^3 - y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

यहाँ, $x = 4m$ और $y = 7n$

$$(4m)^3 - (7n)^3 = (4m - 7n)[(4m)^2 + (4m)(7n) + (7n)^2]$$

इस प्रकार, $64m^3 - 343n^3 = (4m - 7n)(16m^2 + 28mn + 49n^2)$

11. गुणनखंड करें: $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

समाधान:

हम बीजीय सर्वसमिका का उपयोग करेंगे : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

दी गई अभिव्यक्ति $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$ को $(3x)^3 + (y)^3 + (z)^3 - 3(3x)(y)(z)$ के रूप में लिखा जा सकता है

पहचान $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ का उपयोग करके

हम लिख सकते हैं: $(3x)^3 + (y)^3 + (z)^3 - 3(3x)(y)(z) = (3x + y + z)[(3x)^2 + (y)^2 + (z)^2 - (3x)(y) - yz - (z)(3x)]$

अतः, $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz = (3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3zx)$

12. सत्यापित करें कि $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1/2 (x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

समाधान:

दाएँ पक्ष से मूल्यांकन करने पर,

$$\begin{aligned} \text{दायाँ पक्ष} &= 1/2 (x + y + z) [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \\ &= 1/2 (x + y + z) [(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2)] \\ &= 1/2 (x + y + z) [2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx] \\ &= 1/2 (x + y + z) (2) [x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx] \\ &= x[x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx] + y[x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx] + z[x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx] \\ &= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - x^2z + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + zx^2 + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2 \end{aligned}$$

सरलीकरण पर,

$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \text{बायाँ पक्ष}$$

13. यदि $x + y + z = 0$, तो दर्शाइए कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

समाधान:

पहचान का उपयोग करते हुए : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

यदि $x + y + z = 0$, तो संपूर्ण दायाँ पक्ष 0 हो जाता है।

अतः बायाँ पक्ष $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

इस प्रकार, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

१४. वास्तव में घनों की गणना किए बिना, निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

$$(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$$

$$(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$$

समाधान:

i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

मान लीजिए $x = -12, y = 7, z = 5$

तो $x + y + z = -12 + 7 + 5 = 0$

हम बीजीय सर्वसमिका जानते हैं , यदि $x + y + z = 0$ तो $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

इस प्रकार, $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3 = 3(-12)(7)(5)$

$= -1260$

ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

मान लीजिए $x = 28, y = -15, z = -13$

तो $x + y + z = 28 - 15 - 13 = 0$

हम बीजीय सर्वसमिका जानते हैं, यदि $x + y + z = 0$ तो $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

इस प्रकार, $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3 = 3(28)(-15)(-13)$

$= 16380$

15. निम्नलिखित आयतों में से प्रत्येक की लंबाई और चौड़ाई के लिए संभावित व्यंजक दीजिए, जिसमें उनके क्षेत्रफल दिए गए हों:

i) क्षेत्रफल: $25a^2 - 35a + 12$ ii) क्षेत्रफल: $35y^2 + 13y - 12$

समाधान:

i) आयत का क्षेत्रफल $= 25a^2 - 35a + 12$

लेकिन हम जानते हैं कि, आयत का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई

इसलिए, हम दिए गए व्यंजक $25a^2 - 35a + 12$ को गुणनखंडित करेंगे

अब $25a^2 - 35a + 12$ लेते हुए, दो संख्याएँ p, q ज्ञात कीजिए जैसे कि:

- $p + q = a$ का गुणांक
- $pq = a^2$ के गुणांक और स्थिरांक का गुणनफल

$$p + q = -35 \text{ (a का गुणांक)}$$

$$pq = 25 \times 12 = 300 \text{ (a}^2 \text{ के गुणांक और स्थिर पद का गुणनफल)}$$

परीक्षण और त्रुटि विधि से, हमें $p = -20, q = -15$ प्राप्त होता है।

अब दिए गए बहुपद के मध्य पद को विभाजित करते हुए ,

$$25a^2 - 35a + 12 = 25a^2 - 20a - 15a + 12$$

$$= 25a^2 - 15a - 20a + 12$$

$$= 5a(5a - 3) - 4(5a - 3)$$

$$= (5a - 4)(5a - 3)$$

$$\therefore 25a^2 - 35a + 12 = (5a - 4)(5a - 3)$$

$$\text{इस प्रकार, लंबाई} = 5a - 3, \text{ चौड़ाई} = 5a - 4$$

$$\text{(या) लंबाई} = 5a - 4, \text{ चौड़ाई} = 5a - 3$$

$$\text{ii) आयत का क्षेत्रफल} = 35y^2 + 13y - 12$$

लेकिन हम जानते हैं कि, आयत का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई

अतः, हम दिए गए व्यंजक $35y^2 + 13y - 12$ को गुणनखंडित करेंगे।

अब $35y^2 + 13y - 12$ लेते हुए, दो संख्याएँ p, q ज्ञात कीजिए जैसे कि:

- $p + q = y$ का गुणांक

- $pq = y^2$ के गुणांक और स्थिरांक का गुणनफल

$$p + q = 13 \text{ (y का गुणांक)}$$

$$pq = 35 \times (-12) = -420 \text{ (y}^2 \text{ के गुणांक और स्थिर पद का गुणनफल)}$$

परीक्षण और त्रुटि विधि से, हमें $p = 28$, $q = -15$ प्राप्त होता है।

अब दिए गए बहुपद के मध्य पद को विभाजित करने पर,

$$35y^2 + 13y - 12$$

$$= 35y^2 + 28y - 15y - 12$$

$$= 7y(5y + 4) - 3(5y + 4)$$

$$= (5y + 4)(7y - 3)$$

$$\therefore 35y^2 + 13y - 12 = (5y + 4)(7y - 3)$$

$$\text{अतः, लंबाई} = 5y + 4, \text{ चौड़ाई} = 7y - 3$$

$$\text{(या) लंबाई} = 7y - 3, \text{ चौड़ाई} = 5y + 4$$

16. नीचे दिए गए आयतन वाले घनाभों की विमाओं के लिए संभावित व्यंजक क्या हैं?

i) आयतन: $3x^2 - 12x$ ii) आयतन: $12ky^2 + 8ky - 20k$

समाधान:

$$\text{i) घनाभ का आयतन} = 3x^2 - 12x$$

लेकिन हम जानते हैं कि, घनाभ का आयतन = लंबाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई

इसलिए, हम दिए गए बहुपद को गुणनखंडन का उपयोग करके तीन अभिव्यक्तियों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करेंगे।

$$3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$$

इस प्रकार, लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के लिए संभावित अभिव्यक्तियाँ हैं:

$$\text{लंबाई} = 3, \text{ चौड़ाई} = x, \text{ ऊँचाई} = x - 4$$

$$\text{लंबाई} = 3, \text{ चौड़ाई} = x - 4, \text{ ऊँचाई} = x$$

$$\text{लंबाई} = x, \text{ चौड़ाई} = 3, \text{ ऊँचाई} = x - 4$$

$$\text{लंबाई} = x, \text{ चौड़ाई} = x - 4, \text{ ऊँचाई} = 3$$

$$\text{लंबाई} = x - 4, \text{ चौड़ाई} = x, \text{ ऊँचाई} = 3$$

$$\text{लंबाई} = x - 4, \text{ चौड़ाई} = 3, \text{ ऊँचाई} = x$$

$$\text{ii) घनाभ का आयतन} = 12ky^2 + 8ky - 20k$$

लेकिन हम जानते हैं कि, घनाभ का आयतन = लंबाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई

इसलिए, हम दिए गए बहुपद को गुणनखंडन का उपयोग करके तीन अभिव्यक्तियों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करेंगे।

$$12ky^2 + 8ky - 20k = 4k(3y^2 + 2y - 5)$$

अब $3y^2 + 2y - 5$ लेते हुए, दो संख्याएँ p, q ज्ञात कीजिए जैसे कि:

- $p + q = y$ का गुणांक
- $pq = y^2$ के गुणांक और स्थिर पद का गुणनफल।

$$p + q = 2 \text{ (y का गुणांक)}$$

$$pq = 3 \times (-5) = -15 \text{ (y}^2 \text{ के गुणांक और स्थिर पद का गुणनफल)}$$

परीक्षण और त्रुटि विधि से, हमें $p = 5, q = -3$ प्राप्त होता है।

अब दिए गए बहुपद के मध्य पद को विभाजित करते हुए ,

$$3y^2 + 2y - 5 = 3y^2 + 5y - 3y - 5$$

$$= 3y^2 - 3y + 5y - 5$$

$$= 3y(y - 1) + 5(y - 1)$$

$$= (3y + 5)(y - 1)$$

$$\text{आयतन} = 4k(y - 1)(3y + 5)$$

इस प्रकार, लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के लिए संभावित व्यंजक हैं,

$$\text{लम्बाई} = 4k, \text{ चौड़ाई} = y - 1, \text{ ऊँचाई} = 3y + 5.$$

$$\text{लम्बाई} = 4k, \text{ चौड़ाई} = 3y + 5, \text{ ऊँचाई} = y - 1.$$

$$\text{लम्बाई} = y - 1, \text{ चौड़ाई} = 4k, \text{ ऊँचाई} = 3y + 5.$$

$$\text{लम्बाई} = y - 1, \text{ चौड़ाई} = 3y + 5, \text{ ऊँचाई} = 4k.$$

$$\text{लम्बाई} = 3y + 5, \text{ चौड़ाई} = 4k, \text{ ऊँचाई} = y - 1.$$

$$\text{लम्बाई} = 3y + 5, \text{ चौड़ाई} = y - 1, \text{ ऊँचाई} = 4k.$$

theboardstudy.com