अर्धवार्षिक प्रश्न-पत्र 2023-24

विषय : गणित

कक्षा : 12 सेट-A

समय : 3 घंटे **पूर्णांक : 80**

निर्देश :

1. सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है।
2. प्रश्नों के लिए आवंटित अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
3. प्रश्न क्र. 1 से प्रश्न क्र. 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं।
4. प्रश्न क्र. 6 से प्रश्न 23 तक प्रत्येक प्रश्न में आंतरिक विकल्प दिया गया है।

प्र.1. सही विकल्प चुनकर लिखिए। $1 \times 6 = 6$

(i) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान है :

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{-\pi}{2}$ (d) $\frac{-\pi}{6}$

(ii) $tan^{-1}(1) - cot^{-1}(-1)$ का मान है :

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{-\pi}{2}$ (c) $\frac{-3\pi}{2}$ (d) $\frac{3\pi}{2}$

(iii) यदि A और B दो उपयुक्त कोटि के आव्यूह हैं तब $(AB)'$ बराबर है :

(a) $A'B'$ (b) $A'-B'$ (c) $A'+B'$ (d) $B'A'$

(iv) 2×3 कोटि के आव्यूह में अवयवों की संख्या है :

(a) 2 (b) 3 (c) 6 (d) 8

(v) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ में समाकलन गुणक (IF) का मान है :

(a) $e^{\int Pdx}$ (b) $e^{\int Pdy}$ (c) $e^{\int Qdx}$ (d) $e^{\int Qdy}$

(vi) यदि रेखा की दिक् कोज्याएँ l, m, n हैं तो l, m, n के बीच सही सम्बन्ध होगा :

(a) $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ (b) $l + m + n = 1$
(c) $l^2 + m^2 + n^2 = 0$ (d) $l + m + n = 0$

प्र.2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये : $1 \times 7 = 7$

(i) कोई फलन $f: X \rightarrow Y$ एकैकी फलन होगा यदि $f(x_1) = f(x_2)$ तब ....।

(ii) $\cos^{-1}(x)$ का मुख्य मान .... में स्थित होगा।

(iii) आव्यूह $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ के लिए $A' =$..........।

(iv) $cos\sqrt{x}$ का x के सापेक्ष अवकलज .... होगा।

(v) यदि फलन $f: X \rightarrow Y$ में f आच्छादक फलन हो तो उसके लिए सहप्रान्त का मान परिसर के .... होगा।

(vi) सदिश में $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश .... होगा।

(vii) आव्यूह A और B एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे यदि $AB = BA =$........

प्र.3. निम्नलिखित के लिए सत्य/असत्य लिखिए : $1 \times 6 = 6$

(i) यदि किसी सारणिक में कोई दो स्तम्भ के अवयव समान हो तो सारणिक का मान शून्य होगा ।

(ii) फलन $f(x)$ अन्तराल I में वर्धमान फलन होगा; जबकि $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, $x_1, x_2 \in I$

(iii) प्रत्येक अवकलनीय फलन सतत् होता है।

(iv) यदि $\vec{a} = k\vec{b}$ तो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेख सदिश होंगे।

(v) समान परिमाण वाले दो सदिश सदैव समान सदिश होते है ।

(vi) $f(x) = x^2$, $f: N \rightarrow N$ के लिए फलन एकैक तथा आच्छादक हैं ।

प्र.4. सही जोड़ी मिलाइए : $1 \times 6 = 6$

स्तंभ 'A'	स्तंभ 'B'
(i) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$	(a) $log\|\sec x\| + C$
(ii) $\int cotx\, dx$	(b) $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$
(iii) $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$	(c) $e^x(x-1) + C$
(iv) $\int xe^x dx$	(d) $\frac{1}{2a}log\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$
(v) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	(e) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$
(vi) $\int sin^2x\, dx$	(f) $\frac{1}{2a}log\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
(vii) $\int tanx\, dx$	(g) $log\|cosec\, x\| + C$

प्र.5. एक वाक्य/शब्द में उत्तर लिखिए : $1 \times 7 = 7$

(i) $tan^{-1}x$ का प्रांत लिखिए ।

(ii) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ एक वर्ग आव्यूह है तो m व n के मध्य सम्बन्ध लिखिए।

(iii) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ का मान लिखिए।

(iv) यदि $x - y = \pi$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान लिखिए।

(v) $\frac{dy}{dx} + x = \cos y$ में स्वतंत्र चर लिखिए।

(vi) अवकल समीकरण $\frac{d^4y}{dx^4} + \sin x = 0$ की कोटि लिखिए।

(vii) $f(x) = \cos x$ अन्तराल $[0, \pi]$ के मध्य किस प्रकार का फलन है वर्धमान अथवा ह्रासमान।

प्र.6) दिखाइए कि समुच्चय $\{1,2,3\}$ में प्रदत्त सम्बन्ध $R = \{(1,2), (2,1)\}$ एक स्वतुल्य सम्बन्ध नहीं हैं । **2**

अथवा

दिखाइए कि वास्तविक संख्या के समुच्चय में $R = \{(a,b) : a \leq b\}$ एक सममित सम्बन्ध नहीं है ।

प्र.7) दिखाइए कि $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ **2**

अथवा

$\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x > 1$ को इसके सरलतम रूप लिखिए ।

प्र.8) X तथा Y ज्ञात कीजिए यदि **2**

$X + Y = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ तथा $X - Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ तो $3A - B$ ज्ञात कीजिए

प्र.9) $e^{\sqrt{x}}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए | **2**

अथवा

$\log(\cos x)$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए |

प्र.10) दिखाइए कि प्रदत्त फलन f, $f(x) = 3x + 2$, $x \epsilon R$, R पर वर्धमान फलन है | **2**

अथवा

वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जब $r = 7$ सेमी है |

प्र.11) हवा के एक बुलबुले की त्रिज्या $\frac{1}{5}$ सेमी/सेकण्ड की दर से बढ़ रही है | बुलबुले का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि त्रिज्या 2 सेमी है | **2**

अथवा

किसी वृत्त की त्रिज्या 0.2 सेमी/सेकंड की दर से बढ़ रही है इसके परिधि की वृद्धि दर ज्ञात कीजिए

प्र.12) मान ज्ञात कीजिए : $\int(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x)dx$ **2**

अथवा

मान ज्ञात कीजिए : $\int(1 - x)\sqrt{x}\, dx$

प्र.13) यदि एक रेखा के दिक् अनुपात $-3, 2, -1$ हैं, तो इसकी दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए | **2**

अथवा

तीनों समकोणिक अक्षों की दिक् कोज्याएं ज्ञात कीजिए |

प्र.14) सदिश $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए | **2**

अथवा

यदि $\vec{a} = \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ तो $|\vec{a} - \vec{b}|$ का मान ज्ञात कीजिए |

प्र.15) सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 5 इकाई हो | **2**

अथवा

दिखाइए कि किसी सदिश का वर्ग उसके परिमाण के वर्ग के बराबर होता है |

प्र.16) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए | **3**

अथवा

रेखा $y = 3x + 2$ x-अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ एवं $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

प्र.17) अवकल समीकरण $(e^x + e^{-x})dy - (e^x - e^{-x})dx = 0$ को हल कीजिए | **3**

अथवा

किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि 5% वार्षिक की दर से होती है, इस बैंक में ₹1000 जमा कराए जाते हैं |ज्ञात कीजिए कि 10 वर्ष बाद यह राशि कितनी हो जाएगी | ($e^{0.5} = 1.648$)

प्र.18) फलन $\sin x + \cos x$ का महत्तम मान ज्ञात करो | 3

अथवा

सिद्ध कीजिए कि एक दिए हुए वृत्त में खींचे गए सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल उच्चिष्ठ होता है

प्र.19) वक्र $y^2 = 4x$ एवं रेखा $x = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए | 3

अथवा

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

प्र.20) सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि – 4

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$$

अथवा

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि –

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

प्र.21) फलन $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{यदि } x \geq 1 \\ x^2+1 & \text{यदि } x < 1 \end{cases}$ हो तो $f(x)$ की $x = 1$ पर सातत्यता की जाँच कीजिए | 4

अथवा

यदि $y = (\log x)^{\cos x}$ हो तो सिद्ध कीजिए $\frac{dy}{dx} = (\log x)^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x\log x} - \sin x \, log(\log x)\right]$

प्र.22) $\int x^2 \log x \, dx$ ज्ञात कीजिए 4

अथवा

$\int sin3x \, cos4x \, dx$ ज्ञात कीजिए

प्र.23) रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ तथा $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए | 4

अथवा

दर्शाइए कि बिन्दुओं $(1, -1, 2)$ और $(3, 4, -2)$ से होकर जाने वाली रेखा बिन्दुओं (0,3,2) और (3,5,6) से जाने वाली रेखा पर लम्ब है |