गणित

(अध्याय - 2) (प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 2.1

निम्नलिखित के मुख्य मानों को ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1:

$sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

उत्तर 1:

माना, $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y$, इसलिए, $sin\ y = -\frac{1}{2} = -sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

हम जानते हैं कि sin^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ होता है और $sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ है। अतः, $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न 2:

$cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

उत्तर 2:

माना, $cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$, इसलिए, $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} = cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

हम जानते हैं कि cos^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi]$ होता है और $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ है। अतः, $cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न 3:

$\text{cosec}^{-1}(2)$.

उत्तर 3:

माना, $\text{cosec}^{-1}(2) = y$. इसलिए,, $\text{cosec } y = 2 = \text{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

हम जानते हैं कि $cosec^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ होता है और $cosec\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ है। अतः, $\text{cosec}^{-1}(2)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न 4:

$tan^{-1}(-\sqrt{3})$.

उत्तर 4:

माना, $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = y$, इसलिए, $\tan y = -\sqrt{3} = -\tan\frac{\pi}{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

हम जानते हैं कि tan^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ होता है और $tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ है। अतः, $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{3}$ है।

प्रश्न 5:

$cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

उत्तर 5:

माना, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y$, इसलिए, $\cos y = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

हम जानते हैं कि cos^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi]$ होता है और $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ है। अतः, $cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान $\frac{2\pi}{3}$ है।

प्रश्न 6:

$\tan^{-1}(-1)$.

उत्तर 6:

माना, $\tan^{-1}(-1) = y$. इसलिए, $\tan y = -1 = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

हम जानते हैं कि tan^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ होता है और $tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ है।

अतः, $\tan^{-1}(-1)$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{4}$ है।

प्रश्न 7:

$sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

उत्तर 7:

माना, $sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = y$, इसलिए, $\sec y = \frac{2}{\sqrt{3}} = sec\left(\frac{\pi}{6}\right)$

हम जानते हैं कि sec^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ होता है और $sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ है।

अतः, $sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न 8:

$cot^{-1}\sqrt{3}$.

उत्तर 8:

माना, $\cot^{-1}\sqrt{3} = y$, इसलिए, $\cot y = \sqrt{3} = \cot\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

हम जानते हैं कि cot^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $(0, \pi)$ होता है और $cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ है। अतः, $\cot^{-1}\sqrt{3}$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न 9:

$cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

उत्तर 9:

माना, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = y$, इसलिए, $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

हम जानते हैं कि cos^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi]$ होता है और $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ है। अतः, $cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान $\frac{3\pi}{4}$ है।

प्रश्न 10:

$cosec^{-1}(-\sqrt{2})$.

उत्तर 10:

माना, $cosec^{-1}(-\sqrt{2}) = y$, इसलिए, $cosec\ y = -\sqrt{2} = -cosec\left(\frac{\pi}{4}\right) = cosec\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

हम जानते हैं कि $cosec^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ होता है और $cosec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ है। अतः, $cosec^{-1}(-\sqrt{2})$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{4}$ है।

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 11:

$tan^{-1}(1) + cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

उत्तर 11:

माना, $tan^{-1}(1) = x$, इसलिए, $\tan x = 1 = tan\frac{\pi}{4}$

हम जानते हैं कि tan^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ होता है। $\therefore tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

माना, $cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y$, इसलिए,

$$\cos y = -\frac{1}{2} = -cos\frac{\pi}{3} = cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

हम जानते हैं कि cos^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0,\pi]$ होता है। $\therefore cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

माना, $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = z$, इसलिए,

$$\sin z = -\frac{1}{2} = -sin\frac{\pi}{6} = sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

हम जानते हैं कि sin^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ होता है। $\therefore \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

अब, $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi + 8\pi - 2\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$$

प्रश्न 12:

$cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

उत्तर 12:

माना, $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = x$, इसलिए,

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

हम जानते हैं कि cos^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0,\pi]$ होता है। $\therefore \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

माना, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y$, इसलिए,

$$\sin y = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

हम जानते हैं कि sin^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ होता है। $\therefore sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$

अब, $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

प्रश्न 13:

यदि $sin^{-1}x=y$, तो

(A) $0\le y\le\pi$

(B) $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

(C) $0<y<\pi$

(D) $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$

उत्तर 13:

दिया है: $sin^{-1}x=y$

हम जानते हैं कि sin^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ होता है। इसलिए, $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$.

अतः, विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 14:

$tan^{-1}\sqrt{3}-sec^{-1}(-2)$ का मान बराबर है:

(A) π

(B) $-\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{2\pi}{3}$

उत्तर 14:

माना, $tan^{-1}\sqrt{3}=x$, इसलिए,

$$\tan x=\sqrt{3}=tan\frac{\pi}{3}$$

हम जानते हैं कि tan^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ होता है। $\therefore \tan^{-1}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$

माना, $\sec^{-1}(-2)=y$, इसलिए,

$$\sec y=-2=-\sec\frac{\pi}{3}=\sec\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sec\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

हम जानते हैं कि sec^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ होता है। $\therefore \sec^{-1}(-2)=\frac{2\pi}{3}$

अब,

$$\tan^{-1}\sqrt{3}-\sec^{-1}(-2)=\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$$

अतः, विकल्प (B) सही है।

गणित

(अध्याय - 2) (प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 2.2

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए:

प्रश्न 1:

$3sin^{-1}x = sin^{-1}(3x - 4x^3),\ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$

उत्तर 1:

माना, $sin^{-1}x = \theta$, then $x = \sin\theta$. We have,

$$\text{RHS} = sin^{-1}(3x - 4x^3) = sin^{-1}(3\sin\theta - 4sin^3\theta)$$
$$= sin^{-1}(\sin 3\theta) = 3\theta = 3sin^{-1}x = \text{LHS}$$

प्रश्न 2:

$3cos^{-1}x = cos^{-1}(4x^3 - 3x),\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$

उत्तर 2:

माना, $cos^{-1}x = \theta$, then $x = \cos\theta$. We have,

$$\text{RHS} = cos^{-1}(4x^3 - 3x) = cos^{-1}(4cos^3\theta - 3cos\theta)$$
$$= cos^{-1}(\cos 3\theta) = 3\theta = 3cos^{-1}x = \text{LHS}$$

प्रश्न 3:

$tan^{-1}\frac{2}{11} + tan^{-1}\frac{7}{24} = tan^{-1}\frac{1}{2}$

उत्तर 3:

$$\text{LHS} = tan^{-1}\frac{2}{11} + tan^{-1}\frac{7}{24}$$
$$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{11} + \frac{7}{24}}{1 - \frac{2}{11} \times \frac{7}{24}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{\frac{48 + 77}{11 \times 24}}{\frac{11 \times 24 - 14}{11 \times 24}}\right)$$
$$= tan^{-1}\frac{48 + 77}{264 - 14} = tan^{-1}\frac{125}{251} = tan^{-1}\frac{1}{2} = \text{RHS}$$

प्रश्न 4:

$2tan^{-1}\frac{1}{2} + tan^{-1}\frac{1}{7} = tan^{-1}\frac{31}{17}$

उत्तर 4:

$$\text{LHS} = 2tan^{-1}\frac{1}{2} + tan^{-1}\frac{1}{7}$$
$$= tan^{-1}\left[\frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right] + tan^{-1}\frac{1}{7} = tan^{-1}\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)} + tan^{-1}\frac{1}{7}$$
$$= tan^{-1}\frac{4}{3} + tan^{-1}\frac{1}{7} = tan^{-1}\left(\frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{1}{7}}\right)$$
$$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{28 + 3}{3 \times 7}}{\frac{3 \times 7 - 4}{3 \times 7}}\right) = tan^{-1}\frac{28 + 3}{21 - 4} = tan^{-1}\frac{31}{17} = \text{RHS}$$

निम्नलिखित फलनों को सरलतम रूप में लिखिए:

प्रश्न 5:

$tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, x \neq 0$

उत्तर 5:

दिया है: $tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

माना, $x = \tan\theta$

$$\therefore tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = tan^{-1}\frac{\sqrt{1+tan^2\theta}-1}{\tan\theta}$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}\right) = tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{2sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}}\right) = tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}tan^{-1}x$$

प्रश्न 6:

$tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$

उत्तर 6:

दिया है: $tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

माना, $x = \text{cosec}\,\theta$

$$\therefore tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{cosec^2\theta-1}}$$

$$= tan^{-1}\frac{1}{\cot\theta} = tan^{-1}\tan\theta = \theta = cosec^{-1}x$$

$$= \frac{\pi}{2} - sec^{-1}x$$

प्रश्न 7:

$tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right), x < \pi$

उत्तर 7:

दिया है: $tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right) = tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{2cos^2\frac{x}{2}}}\right)$

$$= tan^{-1}\left(\sqrt{tan^2\frac{x}{2}}\right) = tan^{-1}\left(tan\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

प्रश्न 8:

$tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right), 0 < x < \pi$

उत्तर 8:

दिया है: $tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$

$$tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{1 - \tan x}{1 + 1.\tan x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\frac{\pi}{4}.\tan x}\right)$$

$$= tan^{-1}\left[tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \frac{\pi}{4} - x$$

प्रश्न 9:

$tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, |x| < a$

उत्तर 9:

दिया है: $tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

माना, $x = \text{a} \sin\theta$

$$\therefore tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = tan^{-1}\left(\frac{\text{a}\sin\theta}{\sqrt{a^2 - a^2 sin^2\theta}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{\text{a}\sin\theta}{a\sqrt{1 - sin^2\theta}}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\text{a}\sin\theta}{\text{a}\sin\theta}\right) = tan^{-1}(\tan\theta) = \theta = sin^{-1}\frac{x}{a}$$

प्रश्न 10:

$tan^{-1}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right), a > 0; \frac{-a}{\sqrt{3}} \leq x \frac{a}{\sqrt{3}}$

उत्तर 10:

दिया है: $tan^{-1}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right)$

माना, $x = a\tan\theta$

$$\therefore tan^{-1}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right) = tan^{-1}\left(\frac{3a^2.a\,tan\,\theta - a^3tan^3\theta}{a^3 - 3a.a^2tan^2\theta}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{3a^3tan\,\theta - a^3tan^3\theta}{a^3 - 3a^3tan^2\theta}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{3tan\,\theta - tan^3\theta}{1 - 3tan^2\theta}\right)$$

$$= tan^{-1}(tan3\theta) = 3\theta$$

$$= 3tan^{-1}\frac{x}{a}$$

निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 11:

$tan^{-1}\left[2cos\left(2sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

उत्तर 11:

दिया है: $tan^{-1}\left[2cos\left(2sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

$\therefore tan^{-1}\left[2cos\left(2sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right] = tan^{-1}\left[2cos\left(2sin^{-1}\left(sin\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]$

$= tan^{-1}\left[2cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)\right] = tan^{-1}\left[2cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = tan^{-1}\left[2\times\frac{1}{2}\right]$

$= tan^{-1}[1] = \frac{\pi}{4}$

प्रश्न 12:

$cot(tan^{-1}a + cot^{-1}a)$.

उत्तर 12:

दिया है: $cot(tan^{-1}a + cot^{-1}a)$.

$\therefore cot(tan^{-1}a + cot^{-1}a) = cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\quad \left[\because tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$

प्रश्न 13:

$tan\frac{1}{2}\left[sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right], |x| < 1, y > 0$ तथा $xy < 1$.

उत्तर 13:

दिया है: $tan\frac{1}{2}\left[sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right]$

$= tan\frac{1}{2}[2tan^{-1}x + 2tan^{-1}y]$ $\quad \left[\because 2tan^{-1}x = sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]$

$= tan\frac{1}{2}[2(tan^{-1}x + tan^{-1}y)] = tan[tan^{-1}x + tan^{-1}y]$

$= tan\left[tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}\right] = \frac{x+y}{1-xy}$

प्रश्न 14:

यदि $sin\left(sin^{-1}\frac{1}{5} + cos^{-1}x\right) = 1$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 14:

दिया है: $sin\left(sin^{-1}\frac{1}{5} + cos^{-1}x\right) = 1$

$\Rightarrow \left(sin^{-1}\frac{1}{5} + cos^{-1}x\right) = sin^{-1}1$

$\Rightarrow \left(sin^{-1}\frac{1}{5} + cos^{-1}x\right) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow sin^{-1}\frac{1}{5} = sin^{-1}x$ $\quad \left[\because sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow x = \frac{1}{5}$

प्रश्न 15:

यदि $tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 15:

दिया है: $tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow tan^{-1}\left(\frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\frac{x-1}{x-2}\times\frac{x+1}{x+2}}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \left[\because\ tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\frac{x-1}{x-2}\times\frac{x+1}{x+2}} = tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\left[\frac{(x-1)(x+2)+(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}\right]}{\left[\frac{(x-2)(x+2)-(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}\right]} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x-x-2+x^2+x-2x-2}{x^2-4-(x^2-1)} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2-4}{-3} = 1$$

$$\Rightarrow 2x^2-4 = -3 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

प्रश्न संख्या 16 से 18 में दिए प्रत्येक व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 16:

$sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

उत्तर 16:

दिया है: $sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

हम जानते हैं कि sin^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ होता है।

$$\therefore sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = sin^{-1}\left(\sin\left\{\pi-\frac{\pi}{3}\right\}\right) = sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

अतः, $sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

प्रश्न 17:

$tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$.

उत्तर 17:

दिया है: $tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

हम जानते हैं कि tan^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ होता है।

$$\therefore tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = tan^{-1}\left(\tan\left\{\pi-\frac{\pi}{4}\right\}\right) = tan^{-1}\left(-\tan\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\tan\left\{-\frac{\pi}{4}\right\}\right) = -\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

अतः, $tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$

प्रश्न 18:

$tan\left(sin^{-1}\frac{3}{5}+cot^{-1}\frac{3}{2}\right).$

उत्तर 18:

दिया है: $tan\left(sin^{-1}\frac{3}{5}+cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

$$\therefore tan\left(sin^{-1}\frac{3}{5}+cot^{-1}\frac{3}{2}\right)=tan\left(tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{5^2-3^2}}+tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

$\left[\because\ sin^{-1}\frac{a}{b}=tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\right.$ तथा $\left.cot^{-1}\frac{a}{b}=tan^{-1}\frac{b}{a}\right]$

$$=tan\left(tan^{-1}\frac{3}{4}+tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

$$=tan\left[tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}\right)\right]$$

$$=tan\left[tan^{-1}\left(\frac{\frac{9+8}{4\times3}}{\frac{4\times3-3\times2}{4\times3}}\right)\right]$$

$$=tan\left(tan^{-1}\frac{17}{6}\right)=\frac{17}{6}$$

प्रश्न 19:

$cos^{-1}\left(cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान बराबर है:

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

उत्तर 19:

दिया है: $cos^{-1}\left(cos\frac{7\pi}{6}\right)$

हम जानते हैं कि cos^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0,\pi]$ होता है।

$$\therefore cos^{-1}\left(cos\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$=cos^{-1}\left[cos\left(2\pi-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$=cos^{-1}\left(cos\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{5\pi}{6}\in[0,\pi]$$

इसलिए, $cos^{-1}\left(cos\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}$

अतः, विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 20: $sin\left(\frac{\pi}{3} - sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ का मान है:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1

उत्तर 20:

दिया है: $sin\left(\frac{\pi}{3} - sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

हम जानते हैं कि sin^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ होता है।

$$\therefore sin\left(\frac{\pi}{3} - sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= sin\left[\frac{\pi}{3} - sin^{-1}\left(-sin\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= sin\left[\frac{\pi}{3} - sin^{-1}\left\{sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]$$

$$= sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)$$

$$= sin\frac{\pi}{2} = 1$$

इसलिए, $sin\left(\frac{\pi}{3} - sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 1$

अतः, विकल्प (D) सही है।

प्रश्न 21:

$tan^{-1}\sqrt{3} - cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान है

(A) π है (B) $-\frac{\pi}{2}$ है (C) 0 है (D) $2\sqrt{3}$ है

उत्तर 21:

दिया है: $tan^{-1}\sqrt{3} - cot^{-1}(-\sqrt{3})$

हम जानते हैं कि tan^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ तथा cot^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $(0, \pi)$ होता है।

$$\therefore tan^{-1}\sqrt{3} - cot^{-1}(-\sqrt{3})$$

$$= tan^{-1}\left(tan\frac{\pi}{3}\right) - cot^{-1}\left(-cot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} - cot^{-1}\left[cot\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{3} - cot^{-1}\left(cot\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi - 5\pi}{6} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$$

इसलिए, $tan^{-1}\sqrt{3} - cot^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2}$

अतः, विकल्प (B) सही है।

गणित

(अध्याय - 2) (प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन)

(कक्षा 12)

अध्याय 2 पर विविध प्रश्नावली

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1:

$cos^{-1}\left(cos\frac{13\pi}{6}\right)$.

उत्तर 1:

दिया है: $cos^{-1}\left(cos\frac{13\pi}{6}\right)$

हम जानते हैं कि cos^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi]$ होता है।

$\therefore cos^{-1}\left(cos\frac{13\pi}{6}\right) = cos^{-1}\left[cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= cos^{-1}\left(cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$

इसलिए, $cos^{-1}\left(cos\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

प्रश्न 2:

$tan^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{6}\right)$.

उत्तर 2:

दिया है: $tan^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{6}\right)$

हम जानते हैं कि tan^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ होता है।

$\therefore tan^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{6}\right) = tan^{-1}\left[tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= tan^{-1}\left(tan\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

इसलिए, $tan^{-1}\left(tan\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

प्रश्न 3:

सिद्ध कीजिए: $2sin^{-1}\frac{3}{5} = tan^{-1}\frac{24}{7}$.

उत्तर 3:

$\text{LHS} = 2sin^{-1}\frac{3}{5} = 2tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{5^2-3^2}}$ $\left[\because sin^{-1}\frac{a}{b} = tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\right]$

$= 2tan^{-1}\frac{3}{4} = tan^{-1}\left[\frac{2 \times \frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right]$ $\left[\because 2tan^{-1}x = tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right]$

$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{3}{2}}{\frac{16-9}{16}}\right]$

$= tan^{-1}\left(\frac{3}{2} \times \frac{16}{7}\right)$

$= tan^{-1}\frac{24}{7}$

$= \text{RHS}$

प्रश्न 4:

सिद्ध कीजिए: $sin^{-1}\frac{8}{17} + sin^{-1}\frac{3}{5} = tan^{-1}\frac{77}{36}$.

उत्तर 4:

$$\text{LHS} = sin^{-1}\frac{8}{17} + sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$$= tan^{-1}\frac{8}{\sqrt{17^2 - 8^2}} + tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{5^2 - 3^2}} \qquad \left[\because\ sin^{-1}\frac{a}{b} = tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right]$$

$$= tan^{-1}\frac{8}{15} + tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{8}{15} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{8}{15} \times \frac{3}{4}}\right] \qquad \left[\because\ tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)\right]$$

$$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{32 + 45}{15 \times 4}}{\frac{15 \times 4 - 8 \times 3}{15 \times 4}}\right] = tan^{-1}\left[\frac{\frac{77}{60}}{\frac{36}{60}}\right]$$

$$= tan^{-1}\frac{77}{36} = \text{RHS}$$

प्रश्न 5:

सिद्ध कीजिए: $cos^{-1}\frac{4}{5} + cos^{-1}\frac{12}{13} = cos^{-1}\frac{33}{65}$

उत्तर 5:

$$\text{LHS} = cos^{-1}\frac{4}{5} + cos^{-1}\frac{12}{13}$$

$$= tan^{-1}\frac{\sqrt{5^2-4^2}}{4} + tan^{-1}\frac{\sqrt{13^2-12^2}}{12} \qquad \left[\because\ cos^{-1}\frac{a}{b} = tan^{-1}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right]$$

$$= tan^{-1}\frac{3}{4} + tan^{-1}\frac{5}{12}$$

$$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{5}{12}}\right] \qquad \left[\because\ tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)\right]$$

$$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{36 + 20}{4 \times 12}}{\frac{4 \times 12 - 3 \times 5}{4 \times 12}}\right] = tan^{-1}\frac{56}{33}$$

$$= cos^{-1}\frac{33}{\sqrt{56^2 + 33^2}} \qquad \left[\because\ tan^{-1}\frac{a}{b} = cos^{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right]$$

$$= cos^{-1}\frac{33}{\sqrt{4225}} = cos^{-1}\frac{33}{65} = \text{RHS}$$

प्रश्न 6:

सिद्ध कीजिए: $cos^{-1}\frac{12}{13} + sin^{-1}\frac{3}{5} = sin^{-1}\frac{56}{65}$

उत्तर 6:

$$\text{LHS} = cos^{-1}\frac{12}{13} + sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$= tan^{-1}\frac{\sqrt{13^2-12^2}}{12} + tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{5^2-3^2}}$

$\left[\because\ cos^{-1}\frac{a}{b} = tan^{-1}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right.$ तथा $\left. sin^{-1}\frac{a}{b} = tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\right]$

$= tan^{-1}\frac{5}{12} + tan^{-1}\frac{3}{4}$

$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{5}{12}+\frac{3}{4}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{3}{4}}\right]$ $\left[\because\ tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$

$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{20+36}{12\times 4}}{\frac{12\times 4-5\times 3}{12\times 4}}\right] = tan^{-1}\frac{56}{33}$

$= sin^{-1}\frac{56}{\sqrt{56^2+33^2}}$ $\left[\because\ tan^{-1}\frac{a}{b} = sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$

$= sin^{-1}\frac{56}{\sqrt{4225}} = sin^{-1}\frac{56}{65}$ = RHS

प्रश्न 7:

सिद्ध कीजिए: $tan^{-1}\frac{63}{16} = sin^{-1}\frac{5}{13} + cos^{-1}\frac{3}{5}$

उत्तर 7:

RHS $= sin^{-1}\frac{5}{13} + cos^{-1}\frac{3}{5}$

$= tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{13^2-5^2}} + tan^{-1}\frac{\sqrt{5^2-3^2}}{3}$ $\left[\because\ cos^{-1}\frac{a}{b} = tan^{-1}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right.$ तथा $\left. sin^{-1}\frac{a}{b} = tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\right]$

$= tan^{-1}\frac{5}{12} + tan^{-1}\frac{4}{3}$

$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{5}{12}+\frac{4}{3}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{4}{3}}\right]$ $\left[\because\ tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$

$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{15+48}{12\times 3}}{\frac{12\times 3-5\times 4}{12\times 3}}\right] = tan^{-1}\frac{63}{16}$ = RHS

प्रश्न 8:

सिद्ध कीजिए: $tan^{-1}\frac{1}{5} + tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{1}{3} + tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

उत्तर 8:

LHS $= tan^{-1}\frac{1}{5} + tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{1}{3} + tan^{-1}\frac{1}{8}$

$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}}\right] + tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}}\right]$ $\left[\because\ tan^{-1}x + tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$

$$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{7+5}{5\times7}}{\frac{5\times7-1\times1}{5\times7}}\right]+tan^{-1}\left[\frac{\frac{8+3}{3\times8}}{\frac{3\times8-1\times1}{3\times8}}\right]$$

$$= tan^{-1}\frac{12}{34}+tan^{-1}\frac{11}{23} = tan^{-1}\frac{6}{17}+tan^{-1}\frac{11}{23}$$

$$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{6}{17}+\frac{11}{23}}{1-\frac{6}{17}\times\frac{11}{23}}\right] \qquad \left[\because\ tan^{-1}x+tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{138+187}{17\times23}}{\frac{17\times23-6\times11}{17\times23}}\right] = tan^{-1}\left(\frac{138+187}{391-66}\right)$$

$$= tan^{-1}\frac{325}{325} = tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4} = \text{RHS}$$

प्रश्न 9:

सिद्ध कीजिए: $tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right), x \in [0,1]$

उत्तर 9:

$$\text{LHS} = tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\times 2tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\times 2tan^{-1}\sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{2}cos^{-1}\left[\frac{1-(\sqrt{x})^2}{1+(\sqrt{x})^2}\right] \qquad \left[\because\ 2tan^{-1}x = cos^{-1}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2}cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \text{RHS}$$

प्रश्न 10:

सिद्ध कीजिए: $cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \frac{x}{2}, x \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

उत्तर 10:

$$\text{LHS} = cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}-\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}\right)$$

$$= cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos y}+\sqrt{1-\cos y}}{\sqrt{1+\cos y}-\sqrt{1-\cos y}}\right) \qquad \left[\text{माना } \frac{\pi}{2}-x = y\right]$$

$$= cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{2cos^2\frac{y}{2}}+\sqrt{2sin^2\frac{y}{2}}}{\sqrt{2cos^2\frac{y}{2}}-\sqrt{2sin^2\frac{y}{2}}}\right) \qquad \left[\because\ 1+\cos y = 2cos^2\frac{y}{2} \text{ तथा } 1-cosy = 2sin^2\frac{y}{2}\right]$$

$$= cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}cos\frac{y}{2}+\sqrt{2}sin\frac{y}{2}}{\sqrt{2}cos\frac{y}{2}-\sqrt{2}sin\frac{y}{2}}\right)$$

$$= cot^{-1}\left(\frac{1+tan\frac{y}{2}}{1-tan\frac{y}{2}}\right) \qquad \left[\text{प्रत्येक पद को } \sqrt{2}cos\frac{y}{2} \text{ से भाग देने पर}\right]$$

$= cot^{-1}\left(\dfrac{tan\frac{\pi}{4} + tan\frac{y}{2}}{1 - tan\frac{\pi}{4}.tan\frac{y}{2}}\right) = cot^{-1}\left[tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)\right]$

$= cot^{-1}\left[cot\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)\right\}\right] = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\left[\because \frac{\pi}{2} - x = y\right]$

$= \frac{x}{2} = \text{RHS}$

प्रश्न 11:

सिद्ध कीजिए: $tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}cos^{-1}x, -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1.$

उत्तर 11:

$\text{LHS} = tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right)$

$= tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+\cos y} - \sqrt{1-\cos y}}{\sqrt{1+\cos y} + \sqrt{1-\cos y}}\right)$ [माना $x = \cos y$]

$= tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2cos^2\frac{y}{2}} - \sqrt{2sin^2\frac{y}{2}}}{\sqrt{2cos^2\frac{y}{2}} + \sqrt{2sin^2\frac{y}{2}}}\right)$ $\left[\because 1 + \cos y = 2cos^2\frac{y}{2}\right.$ तथा $\left.1 - cosy = 2sin^2\frac{y}{2}\right]$

$= tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}cos\frac{y}{2} - \sqrt{2}sin\frac{y}{2}}{\sqrt{2}cos\frac{y}{2} + \sqrt{2}sin\frac{y}{2}}\right)$

$= tan^{-1}\left(\dfrac{1 - tan\frac{y}{2}}{1 + tan\frac{y}{2}}\right)$ [प्रत्येक पद को $\sqrt{2}cos\frac{y}{2}$ से भाग देने पर]

$= tan^{-1}\left(\dfrac{tan\frac{\pi}{4} - tan\frac{y}{2}}{1 + tan\frac{\pi}{4}.tan\frac{y}{2}}\right) = tan^{-1}\left[tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)\right]$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{y}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}cos^{-1}x = \text{RHS}$

प्रश्न 12:

सिद्ध कीजिए: $\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}sin^{-1}\frac{1}{3} = \frac{9}{4}sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$

उत्तर 12:

$\text{LHS} = \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}sin^{-1}\frac{1}{3} = \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{2} - sin^{-1}\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{9}{4}\left(cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$ $\left[\because sin^{-1}x + cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$

$= \frac{9}{4}\left(sin^{-1}\frac{\sqrt{3^2 - 1^2}}{3}\right)$ $\left[\because cos^{-1}\frac{a}{b} = sin^{-1}\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}\right]$

$= \frac{9}{4}\left(sin^{-1}\frac{\sqrt{8}}{3}\right) = \frac{9}{4}\left(sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \text{RHS}$

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए:

प्रश्न 13:

$2tan^{-1}(\cos x) = tan^{-1}(2\text{cosec}\, x)$

उत्तर 13:

दिया है: $2tan^{-1}(\cos x) = tan^{-1}(2\text{cosec}\, x)$

$\Rightarrow tan^{-1}\left(\frac{2\cos x}{1-cos^2 x}\right) = tan^{-1}(2\text{cosec}\, x)$ $\left[\because\ 2tan^{-1}x = tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right]$

$\Rightarrow \frac{2\cos x}{1-cos^2 x} = 2\text{cosec}\, x$

$\Rightarrow \frac{2\cos x}{sin^2 x} = \frac{2}{\sin x}$ $\Rightarrow 2\sin x.\cos x = 2sin^2 x$

$\Rightarrow 2\sin x.\cos x - 2sin^2 x = 0$ $\Rightarrow 2\sin x(\cos x - \sin x) = 0$

$\Rightarrow 2\sin x = 0$ या $\cos x - \sin x = 0$

परन्तु $\sin x \neq 0$ क्योंकि यह समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है। $\therefore \cos x - \sin x = 0$

$\Rightarrow \cos x = \sin x$

$\Rightarrow \tan x = 1$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$

प्रश्न 14:

$tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}tan^{-1}x,\ (x > 0)$

उत्तर 14:

दिया है: $tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}tan^{-1}x$

$\Rightarrow tan^{-1}1 - tan^{-1}x = \frac{1}{2}tan^{-1}x$ $\left[\because\ tan^{-1}x - tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)\right]$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}tan^{-1}x$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6} = tan^{-1}x$

$\Rightarrow tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = x$

$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

प्रश्न 15:

$sin(tan^{-1}x), |x| < 1$ बराबर होता है:

(A) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (D) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

उत्तर 15:

दिया है: $sin(tan^{-1}x)$

$= sin\left(sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ $\left[\because\ tan^{-1}\frac{a}{b} = sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$

$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

अतः, विकल्प (D) सही है।

प्रश्न 16:

यदि $sin^{-1}(1-x) - 2sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, तो x का मान बराबर है:

(A) 0, $\frac{1}{2}$ (B) 1, $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

उत्तर 16:

दिया है: $sin^{-1}(1-x) - 2sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

माना, $x = \sin y$

$\therefore sin^{-1}(1-\sin y) - 2y = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow sin^{-1}(1-\sin y) = \frac{\pi}{2} + 2y$

$\Rightarrow 1 - \sin y = sin\left(\frac{\pi}{2} + 2y\right)$

$\Rightarrow 1 - \sin y = \cos 2y$

$\Rightarrow 1 - \sin y = 1 - 2sin^2y$ $[\because \cos 2y = 1 - 2sin^2y]$

$\Rightarrow 2sin^2y - \sin y = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - x = 0$ $[\because x = sin\, y]$

$\Rightarrow x(2x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ या $x = \frac{1}{2}$

परन्तु $x \neq \frac{1}{2}$ क्योंकि यह समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।

$\therefore x = 0$ दी गई समीकरण का हल है।

अतः, विकल्प (C) सही है।

प्रश्न 17:

$tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$ का मान है:

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $-\frac{3\pi}{4}$

उत्तर 17:

$tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$

$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{x}{y} - \frac{x-y}{x+y}}{1 + \frac{x}{y} \times \frac{x-y}{x+y}}\right]$ $\left[\because tan^{-1}x - tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)\right]$

$= tan^{-1}\left[\frac{\frac{x(x+y) - y(x-y)}{y(x+y)}}{\frac{y(x+y) + x(x-y)}{y(x+y)}}\right]$

$= tan^{-1}\left[\frac{x^2 + xy - xy + y^2}{xy + y^2 + x^2 - xy}\right]$

$= tan^{-1}\left[\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}\right]$

$= tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$

अतः, विकल्प (C) सही है।