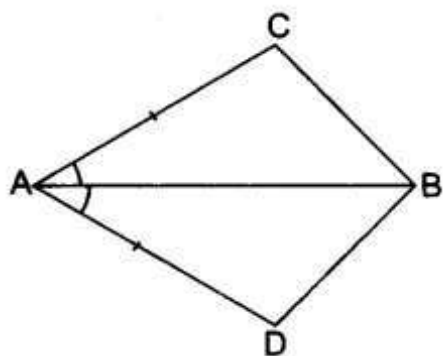


Chapter 7 Triangles (त्रिभुज)

प्रश्नावली 7.1

प्रश्न 1.

चतुर्भुज ACBD में, $AC = AD$ है और रेखाखण्ड AB, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि $\triangle ABC = \triangle ABD$ है। BC और BD के बारे में आप क्या कह सकते हैं?



हल :

दिया है : ACBD एक चतुर्भुज है जिसमें भुजा $AC = AD$ है और रेखाखण्ड AB, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

सिद्ध करना है : $\triangle ABC = \triangle ABD$; और

ज्ञात करना है : BC और BD में सम्बन्ध।

उपपत्ति: $\triangle ABC$ और $\triangle ABD$ की तुलना करने पर,

$AC = AD$ (दिया है)

$\angle CAB = \angle DAB$ (दिया है)।

$AB = AB$ (उभयनिष्ठ है)

$\triangle ABC = \triangle ABD$ (S.A.S. से)

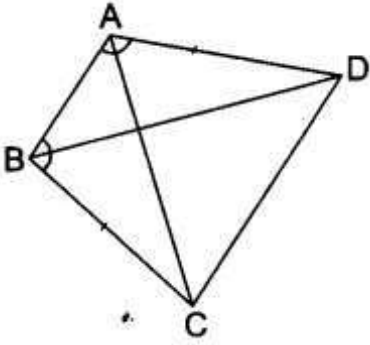
Proved.

$BC = BD$

प्रश्न 2.

ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें $AD = BC$ और $\angle DAB = \angle CBA$ है। सिद्ध कीजिए कि

- (i) $\triangle ABD = \triangle BAC$
- (ii) $BD = AC$
- (iii) $\angle ABD = \angle BAC$



हल :

दिया है : चतुर्भुज ABCD में $AD = BC$ और $\angle DAB = \angle CBA$

सिद्ध करना है :

- (i) $\triangle ABD = \triangle BAC$
- (ii) $BD = AC$
- (iii) $\angle ABD = \angle BAC$

उपपत्ति (i) $\triangle ABD$ और $\triangle BAC$ में,

$AD = BC$ (दिया है)

$\angle DAB = \angle CBA$ (दिया है)

$AB = AB$ (उभयनिष्ठ है)

$\triangle ABD = \triangle BAC$ (S.A.S. से)

(ii) सर्वांगसम त्रिभुजों में संगत मापें बराबर होती हैं और $\triangle ABD$ और $\triangle BAC$ सर्वांगसम हैं।

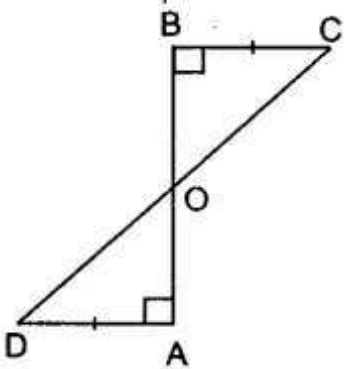
संगत भुजाएँ $BD = AC$

(iii) $\triangle ABD = \triangle BAC$

$\angle ABD = \angle BAC$ (C.P.C.T.) Proved.

प्रश्न 3.

एक रेखाखण्ड AB पर AD और BC दो बराबर लम्ब रेखाखण्ड हैं। दर्शाइए कि CD, रेखाखण्ड AB को समद्विभाजित करता है।



हल :

दिया है : AB एक रेखाखण्ड है जिसके सिरों A तथा B पर क्रमशः AD और BC लम्ब इस प्रकार हैं कि $AD = BC$

सिद्ध करना है : CD, रेखाखण्ड AB को समद्विभाजित करता है।

उपपत्ति: प्रश्नानुसार, $\angle DAB = 90^\circ \Rightarrow \angle DAO = 90^\circ$

तथा $\angle CBA = 90^\circ \Rightarrow \angle CBO = 90^\circ$

$\angle DAO = \angle CBO \dots(1)$

$\angle AOD = \angle COB \dots(2)$ (शीर्षाभिमुख कोण)

(1) और (2) को जोड़ने पर,

$\angle DAO + \angle AOD = \angle CBO + \angle COB$

$\Rightarrow 180^\circ - \angle ADO = 180^\circ - \angle BCO$ (त्रिभुज के अन्तःकोणों का योग 180° होता है।)

$\Rightarrow \angle ODA = \angle OCB \dots(3)$

अब $\triangle AOD$ व $\triangle BOC$ में,

$\angle DAO = \angle CBO$ [समीकरण (1) से]

$AD = BC$ (दिया है)

$\angle ODA = \angle OCB$ [समीकरण (3) से]

$\triangle AOD = \triangle BOC$ (S.A.S. से)

$AO = BO$ (C.P.C.T.)

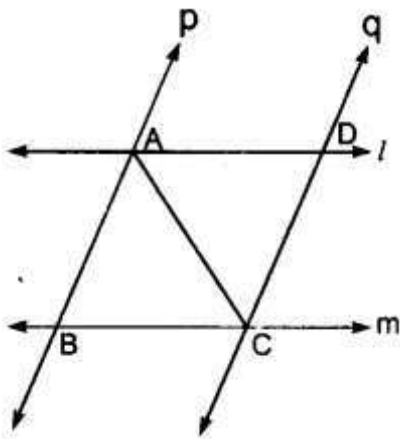
रेखाखण्ड AB बिन्दु O पर समद्विभाजित होता है।

अतः CD , रेखाखण्ड AB को बिन्दु O पर समद्विभाजित करता है।

Proved.

प्रश्न 4.

l और m दो समान्तर रेखाएँ हैं जिन्हें समान्तर रेखाओं p और q का एक अन्य युग्म प्रतिच्छेदित करता है। दर्शाइए कि $\triangle ABC = \triangle CDA$



हल:

दिया है। l और m दो समान्तर रेखाएँ हैं जिनको एक अन्य दो समान्तर रेखाओं p और q का युग्म बिन्दुओं A, B, C और D पर प्रतिच्छेदित करता है। रेखाखण्ड AC खींचा गया है।

सिद्ध करना है : $\triangle ABC = \triangle CDA$

उपपत्ति : $l \parallel m$ और AC एक तिर्यक रेखाखण्ड इन्हें प्रतिच्छेदित करता है।

$\angle DAC = \angle BCA$ (एकान्तर कोण युग्म)

इसी प्रकार, $p \parallel q$ है और AC एक तिर्यक रेखाखण्ड इन्हें प्रतिच्छेदित करता है।

$\angle DCA = \angle BAC$ (एकान्तर कोण युग्म)

अब $\triangle ABC$ और $\triangle CDA$ में, $\angle BCA = \angle DAC$ (ऊपर सिद्ध किया है)

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ है)

$\angle BAC = \angle DCA$ (ऊपर सिद्ध किया है)

$\triangle ABC = \triangle CDA$ (A.S.A से)

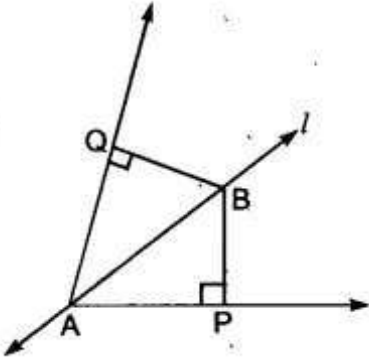
Proved.

प्रश्न 5.

रेखा l कोण A को समद्विभाजित करती है और B रेखा पर स्थित कोई बिन्दु है। BP और BQ कोण A की भुजाओं पर B से डाले गए लम्ब हैं। दर्शाइए कि

(i) $\triangle APB = \triangle AQB$

(ii) $BP = BQ$ अर्थात् बिन्दु B कोण A की भुजाओं से समदूरस्थ है।

**हल :**

दिया है। एक रेखा है जो $\angle A$ को समद्विभाजित करती है। रेखा l पर कोई बिन्दु B स्थित है। बिन्दु B से $\angle A$ की भुजाओं AP और AQ पर क्रमशः BP और BQ लम्ब खींचे गए हैं।

सिद्ध करना है : (i) $\triangle APB = \triangle AQB$,

(ii) $BP = BQ$ अर्थात् बिन्दु B कोण A की भुजाओं से समदूरस्थ है।

उपपत्ति : (i) $BP \perp AP$ और $BQ \perp AQ$

$$\angle P = 90^\circ \text{ और } \angle Q = 90^\circ \dots (1)$$

l रेखा l , $\angle A$ को समद्विभाजित करती है।

$$\angle QAB = \angle PAB$$

$$\angle QAB = \angle PAB = x^\circ \dots (2)$$

तब $\triangle APB$ और $\triangle AQB$ के अन्तःकोणों के योग की समानता से,

$$\angle ABP + \angle PAB + \angle P = \angle ABQ + \angle QAB + \angle Q$$

$$\angle ABP + x + 90^\circ = \angle ABQ + x^\circ + 90^\circ \text{ [समीकरण (1) तथा (2) से]}$$

$$\angle ABP = \angle ABQ$$

Proved.

अब $\triangle APB$ और $\triangle AQB$ में, $\angle PAB = \angle QAB$ (दिया है)

$AB = AB$ (उभयनिष्ठ है)

$\angle ABP = \angle ABQ$ (अभी सिद्ध किया है)

$\triangle APB = \triangle AQB$ (A.S.A से)

(ii) : $\triangle APB = \triangle AQB$

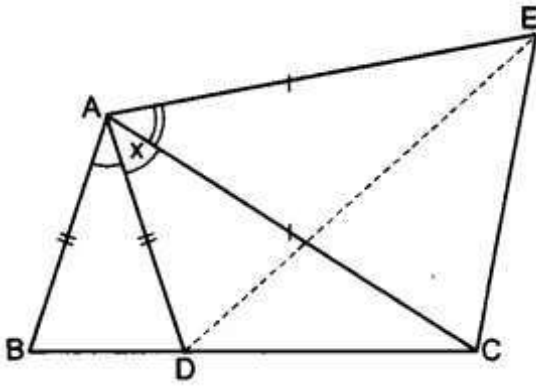
$BP = BQ$ (C.P.C.T.)

अर्थात् बिन्दु B , $\angle A$ की भुजाओं से समदूरस्थ है।

Proved.

प्रश्न 6.

दी गई आकृति में, $AC = AE$, $AB = AD$ और $\angle BAD = \angle EAC$ है, दर्शाइए कि $BC = DE$ है।



हल :

दिया है : दी गई आकृति के $\triangle ABD$ में $AB = AD$ तथा $\triangle ACE$ में $AC = AE$ है और $\angle BAD = \angle EAC$ । रेखाखण्ड DE खींचा गया है।

सिद्ध करना है : $BC = DE$

उपपत्ति : $\angle BAD = \angle EAC$ दोनों ओर $\angle DAC$ जोड़ने पर,

$$\angle BAD + \angle DAC = \angle EAC + \angle DAC$$

$$\angle BAC = \angle DAE$$

अब $\triangle ABC$ तथा $\triangle ADE$ में,

$$AB = AD \text{ (दिया है)}$$

$$\angle BAC = \angle DAE \text{ [समीकरण (1) से]}$$

$$AC = AE \text{ (दिया है)}$$

$$\triangle ABC = \triangle ADE \text{ (S.A.S. से)}$$

$$\text{अतः } BC = DE \text{ (C.P.C.T.)}$$

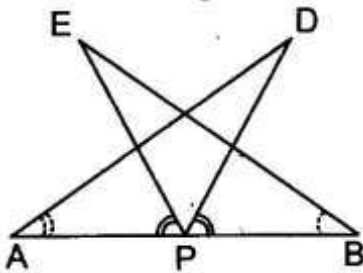
Proved.

प्रश्न 7.

AB एक रेखाखण्ड है और P इसका मध्य बिन्दु है। D और E रेखाखण्ड AB के एक ही ओर स्थित दो बिन्दु इस प्रकार हैं कि $\angle BAD = \angle ABE$ और $\angle EPA = \angle DPB$ है। दर्शाइए कि

$$(i) \triangle DAP = \triangle EBP$$

$$(ii) AD = BE$$



हल :

दिया है : AB एक रेखाखण्ड है जिसका मध्य-बिन्दु P है। AB के एक ही ओर दो बिन्दु D और E हैं। D से रेखाखण्ड DA और DP खींचे गए हैं और E से रेखाखण्ड EB और EP खींचे गए हैं जिससे $\angle BAD = \angle ABE$ तथा $\angle EPA = \angle DPB$ है।

सिद्ध करना है :

$$(i) \triangle DAP = \triangle EBP$$

$$(ii) AD = BE$$

उपपत्ति (i) P, AB का मध्य बिन्दु है जिससे $AP = BP$

और $\angle BAD = \angle ABE$ (दिया है)

$\angle PAD = \angle PBE$

हमें ज्ञात है कि $\angle EPA = \angle DPB$

दोनों पक्षों में $\angle EPD$ जोड़ने पर,

$\angle EPA + \angle EPD = \angle DPB + \angle EPD$

$\angle DPA = \angle EPB$ (चित्र से)

अब $\triangle DAP$ तथा $\triangle EBP$ में, $\angle DPA = \angle EPB$ (अभी सिद्ध किया है)

$AP = BP$ (P, AB का मध्य-बिन्दु है)

$\angle PAD = \angle PBE$ (सिद्ध कर चुके हैं)

$\triangle DAP = \triangle EBP$ (A.S.A. से)

(ii) $\triangle DAP = \triangle EBP$

$AD = BE$ (C.P.C.T.)

Proved.

प्रश्न 8.

एक समकोण त्रिभुज ABC में, जिसमें $\angle C$ समकोण है, M कर्ण AB का मध्य बिन्दु है। C को M से मिलाकर D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि $DM = CM$ है। बिन्दु D को बिन्दु B से मिला दिया जाता है। दर्शाइए कि :

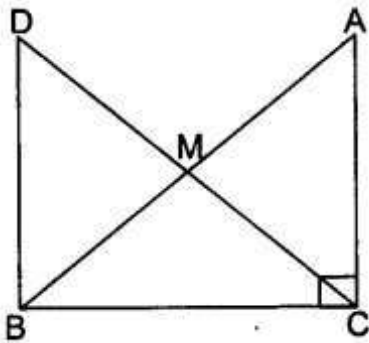
(i) $\triangle AMC = \triangle BMD$

(ii) $\angle DBC$ एक समकोण है।

(iii) $\triangle DBC = \triangle ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$

AB



हल :

दिया है: ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle C = 90^\circ$ है तथा कर्ण AB को मध्य-बिन्दु M है। रेखाखण्ड CM खींचकर इसे बिन्दु D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि $CM = DM$ है। बिन्दु D को बिन्दु B से मिलाकर रेखा BD खींची गई है।

सिद्ध करना है :

(i) $\triangle AMC = \triangle BMD$

(ii) $\angle DBC$ एक समकोण है।

(iii) $\triangle DBC = \triangle ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$

उपपत्ति : (i) $\triangle AMC$ और $\triangle BMD$ में,

$AM = BM$ (M, AB का मध्य-बिन्दु है)

$\angle AMC = \angle BMD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$CM = DM$ (दिया है)

$\triangle AMC = \triangle BMD$ (S.A.S. से)

(ii) $\triangle AMC = \triangle BMD$

$\angle MAC = \angle MBD$

$$AC \parallel BD$$

$$\angle DBC + \angle ACB = 180^\circ$$

$$\angle DBC + 90^\circ = 180^\circ$$

(iii) $\triangle DBC$ और $\triangle ACB$ में,

$$DB = AC \text{ (C.P.C.T.) } [\triangle AMC = \triangle BMD]$$

$$\angle DBC = \angle ACB \text{ [भाग (ii) से]}$$

$$BC = BC \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$$\triangle DBC = \triangle ACB \text{ (S.A.S. से)}$$

$$(iv) DC = AB \text{ (C.P.C.T.)}$$

$$2CM = AB \text{ (DM = CM)}$$

$$CM = \frac{1}{2}AB$$

Proved.

प्रश्नावली 7.2

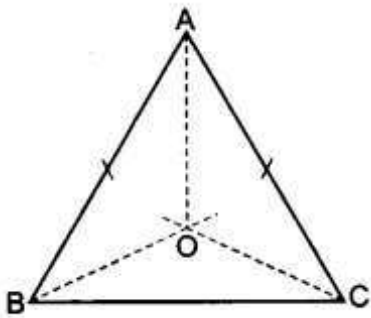
प्रश्न 1.

एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में जिसमें $AB = AC$ है, $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

A और O को जोड़िए और दर्शाइए कि

$$(i) OB = OC$$

(ii) AO, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।



हल :

दिया है : समद्विबाहु $\triangle ABC$ में, $AB = AC$ है।

$\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक BO तथा CO बिन्दु O पर मिलते हैं। रेखाखण्ड AO को जोड़ा गया है।

सिद्ध करना है :

$$(i) OB = OC$$

(ii) AO, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

उपपत्ति :

(i) $\triangle ABC$ में, $AC = AB$ (दिया है)

$$\angle ABC = \angle ACB$$

(त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं)

$$\frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ACB$$

$\angle OBC = \angle OCB \dots (1)$ (BO, CO क्रमशः $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक हैं) :

$\triangle OBC$ में,

$$\angle OBC = \angle OCB$$

अतः $OB = OC$ (त्रिभुज में समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।)

(ii) $\triangle ABO$ तथा $\triangle ACO$ में,

$$AB = AC \text{ (दिया है)}$$

$OB = OC$ (ऊपर सिद्ध किया है)

$AO = AO$ (उभयनिष्ठ भुजा है)

$\triangle ABO = \triangle ACO$ (S.S.S. से)

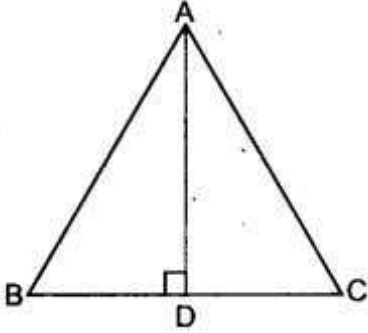
$\angle BAO = \angle CAO$ (C.P.C.T.)

अर्थात्, AO , $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

Proved.

प्रश्न 2.

$\triangle ABC$ में AD भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है दर्शाइए कि $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है।



हल :

दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसमें भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक AD है।

सिद्ध करना है : $\triangle ABC$ समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है।

उपपत्ति : AD , BC का लम्ब समद्विभाजक है।

$BD = CD$ तथा $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$

अब $\triangle ABD$ और $\triangle ACD$ में,

$BD = CD$ (ऊपर सिद्ध किया है)

$\angle ADB = \angle ADC$ (ऊपर सिद्ध किया है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा है)

$\triangle ABD = \triangle ACD$ (S.A.S. से)

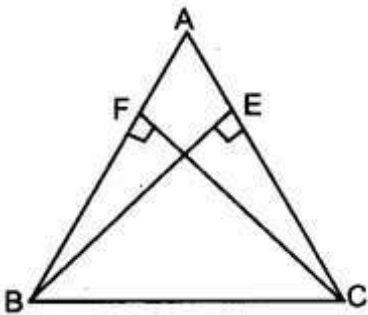
$AB = AC$ (C.P.C.T.)

अर्थात् $\triangle ABC$ समद्विबाहु है।

Proved.

प्रश्न 3.

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें बराबर भुजाओं AC और AB पर क्रमशः शीर्षलम्ब BE तथा CF खींचे गए हैं। दर्शाइए कि ये शीर्ष लम्ब बराबर हैं।



हल :

दिया है : एक समद्विबाहु $\triangle ABC$ में $AB = AC$ तथा शीर्ष B से भुजा AC पर BE लम्ब डाला गया है और शीर्ष C से भुजा AB पर CF लम्ब डाला गया है।

सिद्ध करना है : $BE = CF$

उपपत्ति: $\triangle ABC$ में,

$AC = AB$ (दिया है)

$\angle ABC = \angle ACB \dots (1)$ (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं)

अब $\triangle BCF$ और $\triangle CBE$ में,

$\angle BFC = \angle CEB$ ($BE \perp AC$ तथा $CF \perp AB$)

$BC = BC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

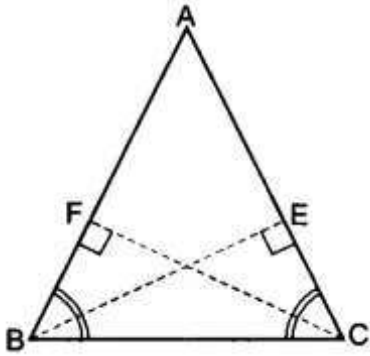
$\angle FBC = \angle ECB$ ($\angle ABC = \angle FBC$ तथा $\angle ACB = \angle ECB$)

$\triangle BCF = \triangle CBE$ (A.S.A. से)

$BE = CF$ (C.P.C.T.)

Proved.

अर्थात् दोनों शीर्षलम्ब बराबर हैं।

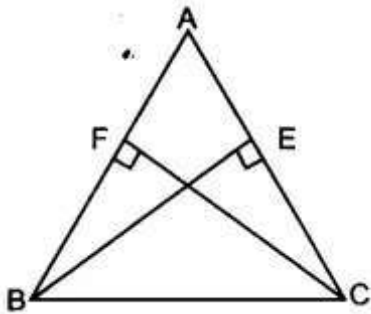


प्रश्न 4.

ABC एक त्रिभुज है जिसमें AC और AB पर खींचे गए शीर्षलम्ब BE तथा CF बराबर हैं। दर्शाइए कि

(i) $\triangle ABE = \triangle ACF$

(ii) $AB = AC$ अर्थात् $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



हल :

दिया है : $\triangle ABC$ में शीर्ष B से शीर्षलम्ब BE तथा शीर्ष C से शीर्षलम्ब CF, क्रमशः AC और AB पर इस प्रकार खींचे गए हैं कि $BE = CF$ है।

सिद्ध करना है :

(i) $\triangle ABE = \triangle ACF$

(ii) $AB = AC$ अर्थात् $\triangle ABC$ समद्विबाहु है।

उपपत्ति : (i) BE शीर्षलम्ब है AC पर $\angle AEB = 90^\circ$

$\angle ABE = 90^\circ - A$ (त्रिभुज के अन्तःकोणों को योग 180° होता है)

इसी प्रकार, CF शीर्षलम्ब है AB पर

$$\angle AFC = 90^\circ$$

$\angle ACF = 90^\circ - A$ (त्रिभुज के अन्तःकोणों का योग 180° होता है)

$$\angle ABE = \angle ACF \dots\dots(1)$$

अब $\triangle ABE$ और $\triangle ACF$ में,

$$\angle ABE = \angle ACF \text{ [समीकरण (1) से]}$$

$$BE = CF \text{ (दिया है)}$$

$$\angle AEB = \angle AFC \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

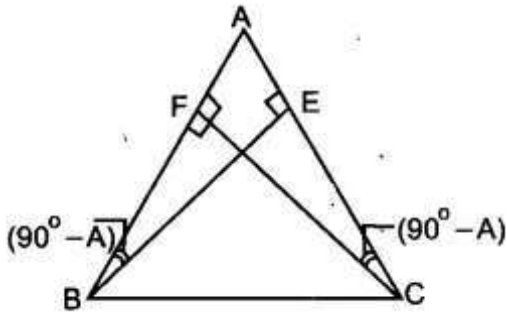
$$\triangle ABE = \triangle ACF \text{ (A.S.A. से)}$$

$$(ii) \triangle ABE = \triangle ACF$$

$$AB = AC \text{ (C.P.C.T.)}$$

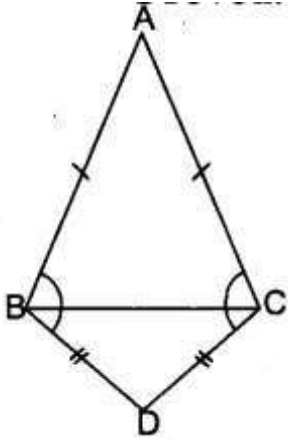
अतः $\triangle ABC$ समद्विबाहु है।

Proved.



प्रश्न 5.

$\triangle ABC$ और $\triangle DBC$ समान (एक ही) आधार पर स्थित दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं। दर्शाइए कि $\angle ABD = \angle ACD$



हल :

दिया है। दो समद्विबाहु $\triangle ABC$ और $\triangle DBC$ एक ही आधार BC पर स्थित हैं और $AB = AC$ तथा $DB = DC$
सिद्ध करना है : $\angle ABD = \angle ACD$

उपपत्ति : $\triangle ABC$ में,

$$AB = AC \text{ (दिया है)}$$

$$\angle ACB = \angle ABC \text{ (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं) } \dots(1)$$

पुनः $\triangle DBC$ में, $DB = DC$ (दिया है)

$$\angle BCD = \angle CBD \text{ (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं) } \dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$\angle ACB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CBD$$

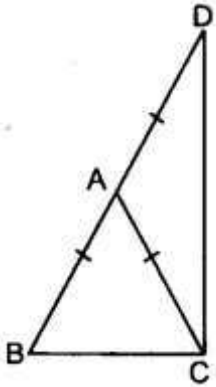
$$\angle ACD = \angle ABD$$

अतः $\angle ABD = \angle ACD$

Proved.

प्रश्न 6.

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है। भुजा BA बिन्दु D तक इस प्रकार बढ़ाई गई है कि $AD = AB$ है। दर्शाइए कि $\angle BCD$ एक समकोण है।



हल :

दिया है : $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें भुजा $AB = AC$ है और भुजा BA को , बिन्दु D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि $AD = AB$ है।

सिद्ध करना है : $\angle BCD$ एक समकोण है।

उपपत्ति : $\triangle ABC$ में,

$AC = AB$ (दिया है)

$\angle ABC = \angle ACB$ (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं) ... (1)

भुजा BA को बिन्दु D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि

$AB = AD$

परन्तु दिया है कि $AB = AC$ भी हैं।

$AC = AD$

$\triangle ACD$ में,

$\angle ADC = \angle ACD$ (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं) ... (2)

समीकरण (1) व समीकरण (2) को जोड़ने पर,

$$\angle ABC + \angle ADC = \angle ACB + \angle ACD$$

$$\angle ABC + \angle ADC = \angle BCD \text{ (चित्र से)}$$

$$\angle DBC + \angle BDC = \angle BCD \text{ (} \angle ABC = \angle DBC \text{ तथा } \angle ADC = \angle BDC \text{) ... (3)}$$

अब : $\triangle BCD$ में,

$$\angle DBC + \angle BDC + \angle BCD = 180^\circ \text{ (त्रिभुज के अन्तःकोणों का योग } 180^\circ \text{ होता है)}$$

$$\angle BCD + \angle BCD = 180^\circ \text{ [समीकरण (3) से]}$$

$$2 \angle BCD = 180^\circ$$

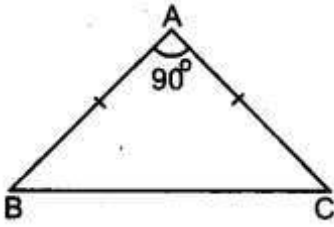
$$\angle BCD = 90^\circ$$

अतः $\angle BCD$ एक समकोण है।

Proved.

प्रश्न 7.

ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle A = 90^\circ$ और $AB = AC$ है। $\angle B$ और $\angle C$ ज्ञात कीजिए।



हल :

दिया है : ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $A = 90^\circ$ और बराबर भुजाओं में $AB = AC$ है।

ज्ञात करना है : $\angle B$ तथा $\angle C$

गणना : $\triangle ABC$ समद्विबाहु है जिसमें $AB = AC$ है।

$\angle C = \angle B$ (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं) ... (1)

त्रिभुज के अन्तःकोणों का योग 180° होता है।

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$90^\circ + \angle B + \angle B = 180^\circ \text{ [समीकरण (1) से]}$$

$$2 \angle B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\angle B = 45^\circ \dots (1)$$

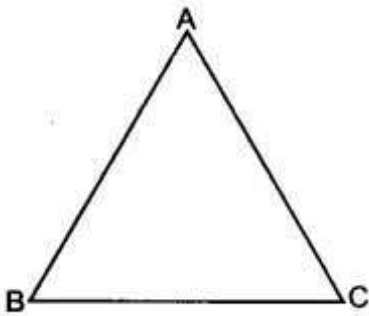
$$\angle C = \angle B$$

$$\angle C = 45^\circ$$

अतः $\angle B = 45^\circ$ तथा $\angle C = 45^\circ$

प्रश्न 8.

दर्शाइए कि किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° होता है।



हल :

दिया है : ABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसमें भुजाएँ AB, BC और CA परस्पर समान लम्बाई की हैं।

$\angle A$, $\angle B$ और $\angle C$ समबाहु त्रिभुज के अन्तः कोण हैं।

सिद्ध करना है : त्रिभुज का प्रत्येक अन्तःकोण $= 60^\circ$

उपपत्ति: $\triangle ABC$ समबाहु है जिसमें $AB = BC = AC$

यदि $AB = AC$ तो $\angle C = \angle B \dots (1)$

यदि $AB = BC$ तो $\angle C = \angle A \dots (2)$ (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं)

समीकरण (1) व समीकरण (2) से

$$\angle A = \angle B = \angle C \dots (3)$$

परन्तु त्रिभुज के अन्तःकोणों का योग $= 180^\circ$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A + \angle A + \angle A = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3 \angle A = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A = 60^\circ$$

तब समीकरण (3) से

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

अतः समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक अन्तः कोण = 60°

Proved.

प्रश्नावली 7.3

प्रश्न 1.

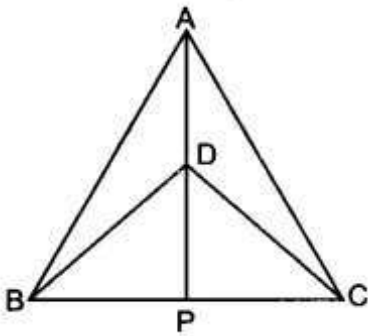
$\triangle ABC$ और $\triangle DBC$ एक ही आधार BC पर बने दो समद्विबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि A और D, भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं। यदि AD बढ़ाने पर BC को P पर प्रतिच्छेद करे तो दर्शाइए कि :

(i) $\triangle ABD = \triangle ACD$

(ii) $\triangle ABP = \triangle ACP$

(iii) AP, $\angle A$ और $\angle D$ दोनों को समद्विभाजित करता है।

(iv) AP, रेखाखण्ड BC का लम्ब समद्विभाजक है।



हल :

दिया है। एक ही आधार BC पर दो समद्विबाहु त्रिभुज, $\triangle ABC$ और $\triangle DBC$ ऐसे स्थित हैं कि A और D, BC के एक ही ओर हैं।

AD को बढ़ाने पर यह BC को P पर काटती है।

सिद्ध करना है :

(i) $\triangle ABD = \triangle ACD$

(ii) $\triangle ABP = \triangle ACP$

(iii) AP, $\angle A$ और $\angle D$ दोनों को समद्विभाजित करता है।

(iv) AP, रेखाखण्ड BC का लम्ब समद्विभाजक है।

उपपत्ति : $\triangle ABC$ समद्विबाहु है जिसको आधार BC है।

$$AB = AC$$

और $\triangle DBC$ समद्विबाहु है जिसका आधार BC है।

$$BD = CD$$

(i) $\triangle ABD$ और $\triangle ACD$ में,

$$AB = AC \text{ [समीकरण (1) से]}$$

$$BD = CD \text{ [समीकरण (2) से]}$$

$$AD = AD \text{ (उभयनिष्ठ भुजा से)}$$

$$\triangle ABD = \triangle ACD \text{ (S.S.S. से)}$$

(ii) $\triangle ABD = \triangle ACD$

$$\angle BAD = \angle CAD$$

अर्थात् AD, $\angle A$ का समद्विभाजक है। (C.P.C.T.)

तब AD को आगे बढ़ाने पर AP भी $\angle A$ का समद्विभाजक होगा।

अब $\triangle ABP$ और $\triangle ACP$ में,

$AB = AC$ [समीकरण (1) से]

$\angle BAP = \angle CAP$ (AP , $\angle A$ का समद्विभाजक है।)

$AP = AP$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\triangle ABP = \triangle ACP$ (S.A.S. से)

(iii) $\triangle ABP = \triangle ACP$ के $\angle BDP = \angle CDP$ (C.P.C.T.)

DP , $\angle D$ का समद्विभाजक है।

AP , $\angle D$ का समद्विभाजक है। और हम अभी सिद्ध कर चुके हैं कि AP , $\angle A$ का समद्विभाजक है।

तब, AP , $\angle A$ और $\angle D$ दोनों को समद्विभाजित करता है।

(iv) अभी हमने सिद्ध किया है कि $\triangle ABP = \triangle ACP$

$\angle APB = \angle APC$

तथा $BP = CP$ (C.P.C.T.)

अब $BP = CP$

AP , भुजा BC का समद्विभाजक है।

$\angle APB + \angle APC = 180^\circ$ और $\angle APB = \angle APC$ (रेखीय युग्म)

तब हल करने पर,

$\angle APB = \angle APC = 90^\circ$

AP , BC पर लम्ब है।

AP , BC पर लम्ब भी है और AP , BC का समद्विभाजक भी है।

अतः AP रेखाखण्ड BC का लम्ब समद्विभाजक है।

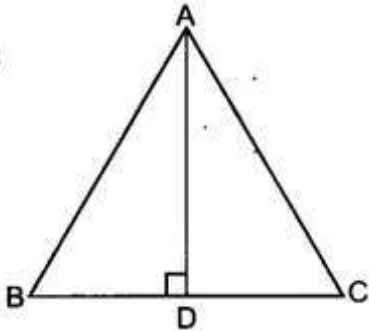
Proved.

प्रश्न 2.

AD एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC का शीर्षलम्ब है, जिसमें $AB = AC$ है। दर्शाइए कि

(i) AD , रेखाखण्ड BC को समद्विभाजित करता है।

(ii) AD , $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।



हल :

दिया है : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है।

त्रिभुज के शीर्ष A से BC पर AD लम्ब डाला गया है जिससे AD शीर्षलम्ब है।

सिद्ध करना है :

(i) AD , रेखाखण्ड BC को समद्विभाजित करता है।

(ii) AD , $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

उपपत्ति : AD , $\triangle ABC$ का शीर्षलम्ब है।

$AD \perp BC$ के $\angle ADB = 90^\circ$

और $\angle ADC = 90^\circ$

AB, $\triangle ABD$ को और AC, $\triangle ACD$ का कर्ण है।

तब समकोण त्रिभुज ABD और समकोण त्रिभुज ACD में, $\angle ADB = \angle ADC$ (प्रत्येक 90°)

$AB = AC$ (दिया है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\triangle ABD = \triangle ACD$ (R.H.S.)

(i) $\angle ABD = \angle ACD$

$BD = CD$ (C.P.C.T.)

D, BC का मध्य-बिन्दु है।

अतः AD, रेखाखण्ड BC को समद्विभाजित करता है।

(ii) $\triangle ABD = \triangle ACD$

$\angle BAD = \angle CAD$ (C.P.C.T.)

अतः AD, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

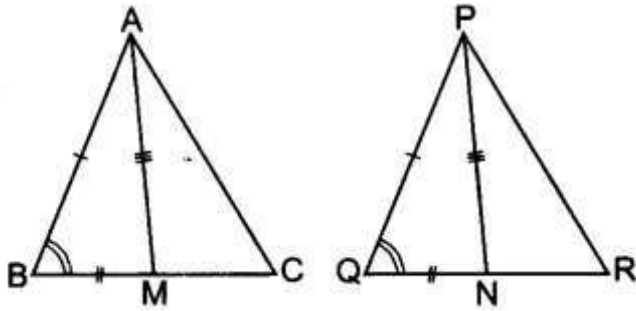
Proved.

प्रश्न 3.

एक $\triangle ABC$ की दो भुजाएँ AB तथा BC और माधिका AM क्रमशः एक-दूसरे $\triangle PQR$ की भुजाओं PQ तथा QR और माधिका PN के बराबर है। दर्शाइए कि

(i) $\triangle ABM = \triangle PQN$

(ii) $\triangle ABC = \triangle PQR$



हल :

दिया है: $\triangle ABC$ और $\triangle PQR$ दो त्रिभुज हैं जिनमें $AB = PQ$, $BC = QR$ तथा माधिका $AM = PN$ सिद्ध करना है :

(i) $\triangle ABM = \triangle PQN$

(ii) $\triangle ABC = \triangle PQR$

उपपत्ति : $BC = QR$ (दिया है)

$$\frac{BC}{2} = \frac{QR}{2}$$

$BM = QN$ (AM व PN माधिकाएँ हैं)

(i) $\triangle ABM$ और $\triangle PQN$ में,

$AB = PQ$ (दिया है)

$AM = PN$ (दिया है)

$BM = QN$ (ऊपर सिद्ध किया है)

$\triangle ABM = \triangle PQN$ (S.S.S. से)

(ii) $\triangle ABM = \triangle PQN \Rightarrow \angle B = \angle Q$ (C.P.C.T.) ... (1)

अब $\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में,

$AB = PQ$ (दिया है)

$BC = QR$ (दिया है)

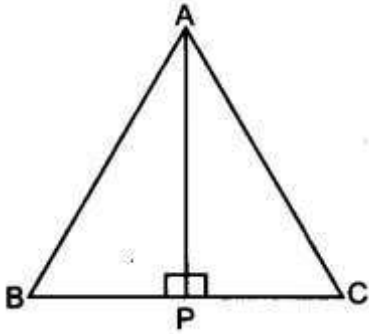
$\angle B = \angle Q$ [समीकरण (1) से]

अतः $\triangle ABC = \triangle PQR$ (S.A.S. पराक्षण स)

Proved.

प्रश्न 4.

BE और CF एक $\triangle ABC$ के दो बराबर शीर्षलम्ब हैं। R.H.S. सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



हल :

दिया है : $\triangle ABC$ एक त्रिभुज है जिसमें शीर्ष B से भुजा AC पर BE शीर्ष लम्ब खींचा गया है और शीर्ष C से भुजा AB पर CF शीर्षलम्ब इस प्रकार है कि $BE = CF$

सिद्ध करना है: $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

उपपत्ति : $\triangle ABC$ में BE, शीर्ष B से AC पर शीर्षलम्ब है।

$$\angle BEC = 90^\circ$$

$\triangle BEC$ एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कर्ण BC है।

पुनः $\triangle ABC$ में CF, शीर्ष C से AB पर शीर्षलम्ब है।

$$\angle BFC = 90^\circ$$

$\triangle BFC$ एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कर्ण BC है।

समकोण त्रिभुज $\triangle BEC$ और $\triangle BFC$ में,

$$\angle BEC = \angle CFB \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$BE = CF \text{ (दिया है)}$$

$$BC = BC \text{ (उभयनिष्ठ भुजा)}$$

$$\triangle BEC = \triangle BFC \text{ (R.H.S.)}$$

$$\angle ECB = \angle FCB$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle ABC \text{ (C.P.C.T.)}$$

अब $\triangle ABC$ में,

$$\angle ACB = \angle ABC$$

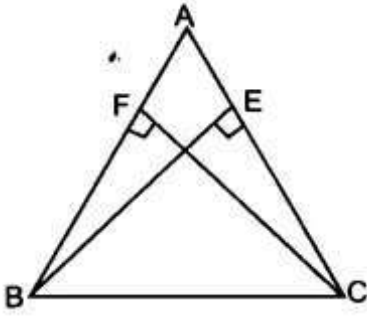
$AB = AC$ (त्रिभुज में समाने कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं)

अतः $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

Proved.

प्रश्न 5.

$\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है। $AP \perp BC$ खींचकर दर्शाइए कि $\angle B = \angle C$



हल :

दिया है: $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है।

शीर्ष A से BC पर AP लम्ब खींचा गया है। सिद्ध करना है : $\angle B = \angle C$

उपपत्ति: $AP \perp BC$

$\triangle APB$ में, $\angle APB = 90^\circ$ जिससे कर्ण AB है।

और $\triangle APC$ में, $\angle APC = 90^\circ$ जिससे कर्ण AC है।

अब $\triangle APB$ और $\triangle APC$ में,

$\angle APB = \angle APC$ (प्रत्येक 90°)

$AB = AC$ (दिया है)

$AP = AP$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\triangle APB = \triangle APC$ (R.H.S. से)

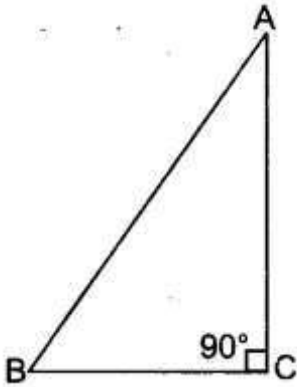
अतः $\angle B = \angle C$ (C.P.C.T.)

Proved.

प्रश्नावली 7.4

प्रश्न 1.

दर्शाइए कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लम्बी (या सबसे बड़ी) भुजा होती है।



हल :

दिया है : $\triangle ABC$ में, $\angle C = 90^\circ$ तथा भुजा AB कर्ण है।

सिद्ध करना है : कर्ण AB, सबसे बड़ी भुजा है।

उपपत्ति: $\triangle ABC$ में, $\angle C = 90^\circ$ (दिया है)

$\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ (त्रिभुज के अन्तःकोणों का योग 180° होता है)

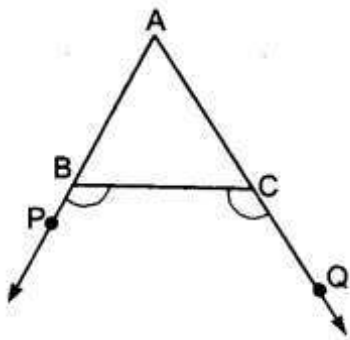
$\angle A$ तथा $\angle B$, 90° से छोटे हैं।

$\angle C > \angle A$ तथा $\angle C > \angle B$

$\triangle ABC$ में,
 $\angle C > \angle A$
 $AB > BC$ (प्रमेय-4 से)
 $\angle C > \angle B$
 $AB > CA$ (प्रमेय-4 से)
 $AB > BC$ और $AB > CA$
 AB , दोनों (BC व CA) से बड़ी है।
 अतः कर्ण AB सबसे बड़ी भुजा है।
 Proved.

प्रश्न 2.

सम्मुख आकृति में, $\triangle ABC$ की भुजाओं AB और AC को क्रमशः बिन्दुओं P और Q तक बढ़ाया गया है साथ ही $\angle PBC < \angle QCB$ है। दर्शाइए कि $AC > AB$



हल :

दिया है : $\triangle ABC$ में भुजाओं AB और AC को आगे बढ़ाया गया है। बड़ी हुई AB पर बिन्दु P और बड़ी हुई AC पर बिन्दु Q लिया गया है।

इस प्रकार बने बहिष्कोणों में $\angle PBC$ AB

उपपत्ति : $\angle PBC$, $\triangle ABC$ का बहिष्कोण है।

$$\angle PBC = \angle ACB + \angle A \dots (1)$$

और $\angle QCB$ भी $\triangle ABC$ का बहिष्कोण है।

$$\angle QCB = \angle ABC + \angle A \dots (2)$$

$$\angle PBC$$

$$\angle ACB + \angle A$$

[समीकरण (1) तथा (2) से

$$\angle ACB$$

अब $\triangle ABC$ में,

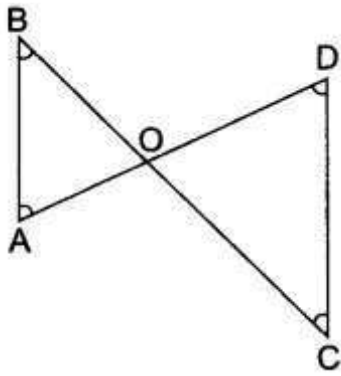
$$\angle ACB < \angle ABC$$

$AC > AB$ (बड़े कोण की सम्मुख, भुजा बड़ी होती है)

Proved.

प्रश्न 3.

सम्मुख आकृति में $\angle B < \angle A$ और $\angle C < \angle D$ है। दर्शाइए कि $AD < BC$



हल :

दिया है : दी गई आकृति में ΔABO में $\angle B$

और ΔCDO में $\angle C$

सिद्ध करना है : ऋजु रेखा AD

उपपत्ति: ΔABO में,

$\angle B$

AO

इसी प्रकार ΔCDO में, $\angle C$

OD

1) व (2) को जोड़ने पर,

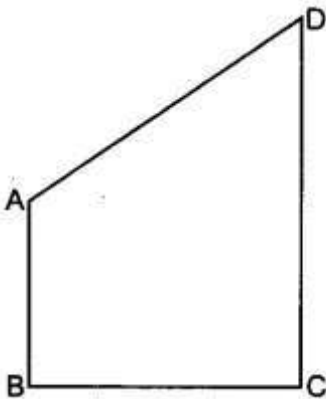
AO + OD

AD

AD

प्रश्न 4.

सम्मुख आकृति में, AB और CD क्रमशः एक चतुर्भुज ABCD की सबसे छोटी और सबसे बड़ी भुजाएँ हैं। दर्शाइए कि $\angle A > \angle C$ और $\angle B > \angle D$



हल :

दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AB सबसे छोटी और CD सबसे बड़ी भुजा है।

सिद्ध करना है : $\angle A > \angle C$ और $\angle B > \angle D$

रचना : रेखाखण्ड AC तथा BD खींचिए।

उपपत्ति : AB सबसे छोटी भुजा है। तब ΔABC में,

$BC > AB$

$\angle BAC > \angle ACB$ (प्रमेय-3 से) ...(1)

पुनः CD सबसे बड़ी भुजा है।

$\triangle ACD$ में,

$CD > AD$

$\angle DAC > \angle DCA$ (प्रमेय-3 से) ... (2)

(1) व (2) को जोड़ने पर,

$\angle BAC + \angle DAC > \angle ACB + \angle DCA$

$\angle BAD > \angle BCD$

$\angle A > \angle C$

AB सबसे छोटी भुजा है।

तब $\triangle ABD$ में,

$AD > AB$

$\angle ABD > \angle ADB$ (प्रमेय-3 से) ... (3)

इसी प्रकार, CD सबसे बड़ी भुजा है।

तब $\triangle BCD$ में,

$CD > BC$

$\angle CBD > \angle BDC$ (प्रमेय-3 से) ... (4)

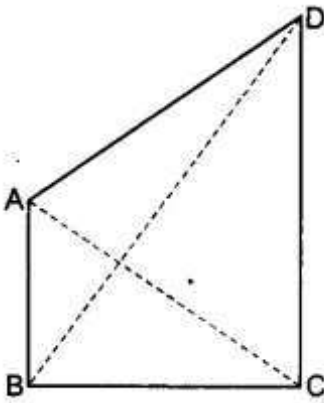
(3) व (4) को जोड़ने पर,

$\angle ABD + \angle CBD > \angle ADB + \angle BDC$

$\angle ABC > \angle ADC$

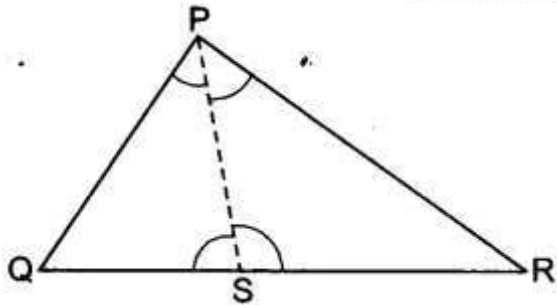
$\angle B > \angle D$

Proved.



प्रश्न 5.

सम्मुख आकृति में, $PR > PQ$ है और PS, $\angle QPR$ को समद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए कि $\angle PSR > \angle PSQ$ है।



हल :

दिया है: $\triangle PQR$ में, $PR > PQ$ और $\angle QPR$ को समद्विभाजक, QR से बिन्दु S पर मिलता है।

माना $\angle PSR = x^\circ$ तथा $\angle PSQ = y^\circ$

सिद्ध करना है : $\angle PSR > \angle PSQ$

उपपत्ति: $\triangle PQR$ में,

$$PR > PQ$$

$$\angle Q > \angle R \text{ (प्रमेय-3 से)}$$

PS, $\angle P$ को समद्विभाजक है।

$$\angle QPS = \frac{1}{2}\angle P$$

$$\text{तथा } \angle RPS = \frac{1}{2}\angle P$$

$\angle x^\circ$, $\triangle PQS$ का भुजा QS के बिन्दु S पर बहिष्कोण है।

$$x^\circ = \angle Q + \angle QPS$$

$$\Rightarrow \angle Q = x^\circ - \angle QPS$$

$$\angle Q = x^\circ - \frac{1}{2}\angle P \dots\dots(1)$$

$\angle y^\circ$, $\triangle PRS$ का भुजा RS के बिन्दु S पर बहिष्कोण है।

$$y^\circ = \angle R + \angle RPS$$

$$\Rightarrow \angle R = y^\circ - \frac{1}{2}\angle RPS$$

$$\Rightarrow \angle R = y^\circ - \frac{1}{2}\angle P$$

$$\angle Q > \angle R \dots\dots(2)$$

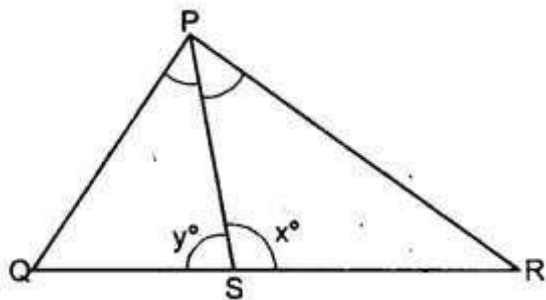
$$x^\circ - \frac{1}{2}\angle P > y^\circ - \frac{1}{2}\angle P$$

[समीकरण (1) व (2) से]

$$x^\circ > y^\circ$$

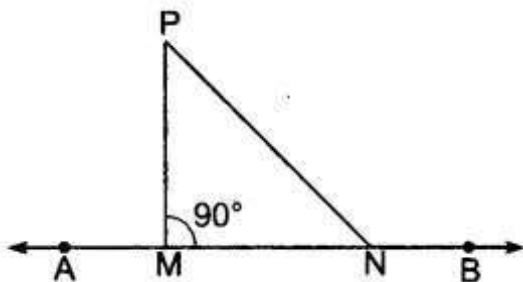
$$\angle PSR > \angle PSQ$$

Proved.



प्रश्न 6.

दर्शाइए कि एक रेखा पर एक दिए हुए बिन्दु से, जो उस रेखा पर स्थित नहीं है, जितने रेखाखण्ड खींचे जा सकते हैं उनमें लम्ब रेखाखण्ड सबसे छोटा होता है।



हल :

दिया है: AB एक सरल रेखा है और P उसके बाहर दिया हुआ एक बिन्दु है। P से रेखा AB पर PM और PN रेखाखण्ड खींचे गए हैं, जिनमें $PM \perp AB$

सिद्ध करना है : PM

उपपत्ति : $\triangle MPN$ में, $\angle M = 90^\circ$, $PM \perp AB$ शेष कोण $\angle MPN + \angle PNM = 90^\circ$ (त्रिभुज के अन्तःकोणों का योग 180° होता है)

$\angle PMN$ सबसे बड़ा कोण है। $\angle M > \angle N$

$PN > PM$ (प्रमेय-4 से)

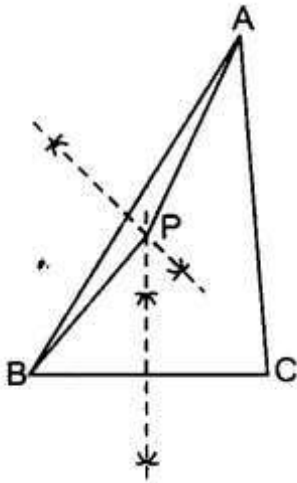
अतः P से खींचे रेखाखण्डों में PM सबसे छोटा है।

Proved.

प्रश्नावली 7.5

प्रश्न 1.

ABC एक त्रिभुज है। इसके अभ्यन्तर में एक ऐसा बिन्दु ज्ञात कीजिए जो $\triangle ABC$ के तीनों शीर्षों से समदूरस्थ है।



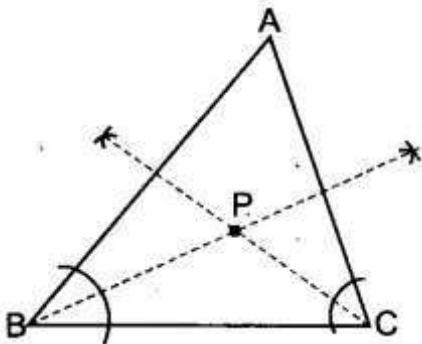
हल :

एक $\triangle ABC$ के अभ्यन्तर में एक ऐसा बिन्दु P ज्ञात करना है जो त्रिभुज के तीनों शीर्षों A, B व C से समान दूरी पर हो।
रचना विधि :

- (1) सर्वप्रथम दिया हुआ त्रिभुज ABC बनाइए।
 - (2) AB तथा BC के लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो परस्पर बिन्दु P पर काटें।
 - (3) रेखाखण्ड PA, PB और PC खींचिए।
- P अभीष्ट बिन्दु है जो तीनों शीर्षों से समदूरस्थ है।

प्रश्न 2.

किसी त्रिभुज के अभ्यन्तर में एक ऐसा बिन्दु ज्ञात कीजिए जो त्रिभुज की सभी भुजाओं से समदूरस्थ है।



हल :

माना ABC एक त्रिभुज है जिसके अभ्यन्तर में एक ऐसा बिन्दु P ज्ञात करना है जो त्रिभुज की तीनों भुजाओं AB, BC और CA

से समदूरस्थ हो।

रचना विधि :

(1) सर्वप्रथम दिया हुआ $\triangle ABC$ बनाइए।

(2) $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक खींचिए जो परस्पर बिन्दु P पर काटें।

P अभीष्ट बिन्दु है जो तीनों भुजाओं से समदूरस्थ है।

प्रश्न 3.

एक बड़े पार्क में, लोग तीन बिन्दुओं (स्थानों) पर केन्द्रित हैं :

A : जहाँ बच्चों के लिए फिसलपट्टी और झूले हैं।

B : जिसके पास मानव निर्मित एक झील है।

C : जो एक बड़े पार्किंग स्थल और बाहर निकलने के रास्ते के निकट है।

एक आइसक्रीम का स्टॉल कहाँ लगाना चाहिए ताकि वहाँ लोगों की अधिकतम संख्या पहुँच सके?



हल :

A, B और C तीन बिन्दु स्थान हैं। आइसक्रीम का स्टॉल लगाने के लिए लोगों की उस पर अधिकतम पहुँच होने के लिए यह आवश्यक है कि स्टॉल तीनों स्थानों से B' समदूरस्थ हो।

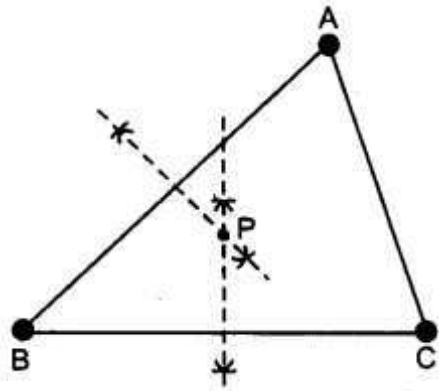
अतः आइसक्रीम स्टॉल लगाने के लिए हमें एक ऐसे स्थान (बिन्दु) P का चयन करना है जो पार्क के तीनों स्थानों से समान दूरी पर हो।

ज्ञात करने की विधि:

(1) बिन्दु A से बिन्दु B को, बिन्दु B से बिन्दु C को और बिन्दु C से बिन्दु A को ऋजु रेखाओं द्वारा मिलाकर $\triangle ABC$ बनाइए।

(2) किन्हीं दो भुजाओं (AB व BC) के लम्ब समद्विभाजक खींचिए जो परस्पर बिन्दु P पर काटें।

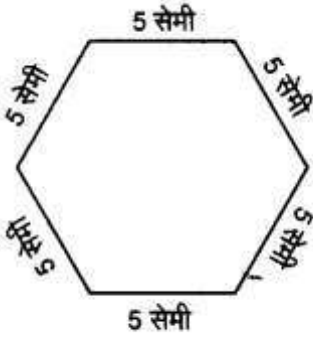
आइसक्रीम स्टॉल के चयन के लिए उपयुक्त स्थान बिन्दु P होगा जो तीनों स्थानों से समदूरस्थ है।



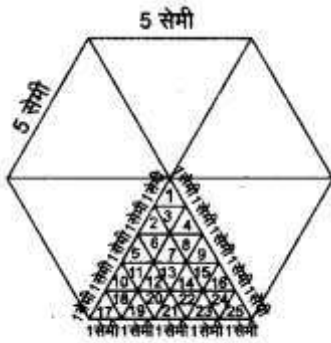
प्रश्न 4.

घड़भुजीय और तारे के आकार की रंगोलियों को 1 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुजों से भरकर पूरा कीजिए। प्रत्येक स्थिति में त्रिभुजों की संख्या गिनिए। किसमें अधिक त्रिभुज हैं?

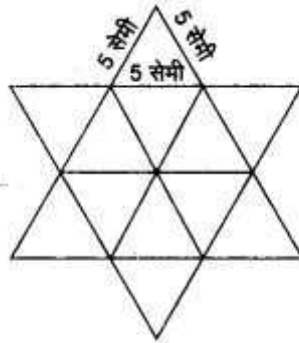
हल :



चित्रों से स्पष्ट है कि विकर्णों को मिलाने पर षड्भुजीय आकृति को 6 समबाहु त्रिभुजों में और तारे के आकार की आकृति को 12 समबाहु त्रिभुजों में विभाजित किया जा सकता है जबकि समबाहु त्रिभुजों में प्रत्येक भुजा, 5 सेमी है।



षड्भुजीय रंगोली



तारे के आकार की रंगोली

पुनः षड्भुजीय आकृति के एक समबाहु त्रिभुज जिसकी भुजा 5 सेमी है, को 1 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुजों में विभाजित कर स्पष्ट किया गया है कि 5 सेमी भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज को 1 सेमी भुजा वाले 25 त्रिभुजों में विभाजित किया जा सकता है।

तब स्थिति 1 : षड्भुजीय रंगोली

इसको 1 सेमी भुजा वाले $6 \times 25 = 150$ समबाहु त्रिभुजों में बाँटा जा सकता है।

स्थिति 2 : तारे के आकार की रंगोली

5 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुजों की संख्या = 12

आकृति में 1 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुजों की संख्या = $12 \times 25 = 300$

स्पष्ट है कि तारे के आकार वाली आकृति में त्रिभुजों की संख्या अधिक है।